S H U X U E

ISBN 978-7-5539-3968-1
定价：14.92 元

普通高中教科书
数学
选择性必修
第一册
湖南教育出版社

普通高中教科书

数学

选择性必修 第一册 SHUXUE

湖南教育出版社

普通高中教科书

数学

选择性必修 第一册 SHUXUE

湖南教育出版社

主　　编　张景中　黄步高
执行主编　李尚志
副 主 编　何书元　朱华伟

本册主要编者　朱华伟　罗运纶　李尚志　成礼智
彭翕成　胡　旺　邹伟华

前 言

人之初，学数数．一二三，四五六，先后顺序要背熟．

按先后顺序排成的一列数就是数列．儿时的我们进入数学之门的第一课就是数列．每次加一，这是等差数列．芝麻开花节节高，如果每一节增长的高度相等，各节高度也组成等差数列．细胞的繁殖，不是每秒增加同样数目，而是细胞个数每秒增长同样倍数，这是等比数列．钢琴从左到右每个键发音频率依次升高，每次乘一个常数，也是等比数列．

荀子说：不积跬步，无以至千里．等差、等比都是讲数列怎样“积跬步”，每一个数加常数或者乘常数或者遵循其他规则变成下一个数，都是“积跬步”．通项公式 $a_n=f(n)$ 则“可以至千里”，由位置的编号 n 直接算出这个位置的数．从函数的观点来看数列，我们能更好地刻画现实世界的离散过程．

数与形是数学的两大主角．几何研究图形，直观、形象，一看就懂但不易于计算；计算有规有矩、容易操作，但灵活多变的算法容易让人舍弃现实背景，陷入数的海洋中不知来龙去脉、不能自拔．

我们不必拘泥于几何与代数各自的不足而止步不前，而应该让它们各显神通、取长补短．需要算的时候将几何转换成代数来计算，需要懂的时候就将代数转换成几何来帮助理解．解析几何就是这样一门体现“形”与“数”结合的学科，它将点、直线、曲线用坐标及方程来表示，用代数方法来研究它们的几何性质，再将计算结果转换成几何结论去解决问题．熟悉几何与代数之间的转换，特别是理解几何语言与代数语言的相互翻译，发挥向量这一集数与形于一身的桥梁作用，将有助于我们在数学世界的探索中挥洒自如．笛卡儿的坐标系开启了变量数学的大门，当我们用代数方法来理解圆锥曲线，古人用非凡智慧才能洞悉的圆锥曲线奥秘，就水落石出、真相大白了．

我们还将学习解决计数问题最基本的原理和方法．解决计数问题的基本思路，是将整体问题分解为最简单的“零件”，将这些“零件”的解决方案通过适当的方式组合起来，解决整体问题．分类加法计数原理和分步乘法计数原理

是实现这种组合的两种最基本的重要方法，它们为许多实际问题的解决提供了思想方法和工具．例如，可以用来解决排列、组合问题，得出在代数运算中非常有用的二项式定理．

当然，在我们同行的路途中，“数学建模”“数学实验”“数学文化”都不容错过，因为任何缜密的思维，只有在实践的过程中，才具备非凡的价值．在这里，我们将感受到数学的威力与无穷魅力！

学好数学需要付出艰苦的努力，同时又能从数学的真与美中享受到快乐．让我们用理性之光照亮数学之旅，在艰苦和快乐中前进吧！

目录 MULU

第1章 数　列

按照一定顺序排成的一列数叫作数列．数列可以看成定义在正整数集或其有限子集上的函数，它是刻画离散过程的重要数学模型．本章在学习数列的概念和表示方式的基础之上，重点研究两类特殊的数列——等差数列和等比数列的变化规律，探求这两类数列在数学建模和解决实际问题中的应用，并介绍用于研究与正整数有关数学命题的一种特殊证明方法——数学归纳法．

1.1 数列的概念

在现实世界中，许多事物的数量可以排成一列数．例如：

（1）如图 1.1－1，在超市的货架上摆放有一些罐头，最顶上一层有 2 听罐头，其余每一层的罐头数都比它上面一层的罐头数多 2，共堆了 8 层，则从上到下每层的罐头数依次为：

$$2，4，6，8，10，12，14，16. \qquad ①$$

图 1.1－1

（2）《庄子·天下》有一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭．"意思是：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完．这样，每日剩下的部分都是前一天的一半．如果把"一尺之棰"看成单位"1"，那么每日剩下的部分依次为：

$$1，\frac{1}{2}，\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\frac{1}{16}，\frac{1}{32}，\cdots. \qquad ②$$

（3）某家庭一年内 1—12 月的用电量(单位：kW·h)依次为：

$$110，120，90，80，62，80，103，115，84，65，81，95. \qquad ③$$

（4）π，2π，3π，4π，…的正弦值依次为：

$$0，0，0，0，\cdots. \qquad ④$$

（5）正整数 1，2，3，4，5，6，…被 3 除的余数依次为：

$$1，2，0，1，2，0，1，2，0，\cdots. \qquad ⑤$$

把这些例子的共同特征抽象出来，得到数列的概念：

按照一定顺序排成的一列数叫作**数列**，数列中的每一个数叫作这个数列的**项**，排在第一位的数叫作数列的**首项**或叫作数列的第 1 项，排在第二位的数叫作数列的第 2 项，…，排在第 n 位的数叫作数列的**第 n 项**，所以数列的一般形式可以写成

$$a_1，a_2，\cdots，a_n，\cdots，$$

简记为$\{a_n\}$.

项数有限的数列称为**有穷数列**，如数列①、③；项数无限的数列称为**无穷数列**，如数列②、④、⑤.

上面的数列②中，每一项的序号 n 与对应项 a_n 有如下关系式：

$$a_n=\frac{1}{2^{n-1}},$$

这样，根据以上公式我们可以求出数列②的任意指定的项.

实际上，对任意的数列$\{a_n\}$，其每一项的序号与该项都有如下对应关系：

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\text{项} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & \cdots
\end{array}$$

因此，数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集$\{1，2，\cdots，n\}$）为定义域的函数 $a_n=f(n)$，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时所对应的一列函数值 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$\cdots$.

如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 可以用关于 n 的一个公式表示，那么这个公式就称为数列$\{a_n\}$的**通项公式**. 从函数的观点看，数列的通项公式就是数列的解析表达式.

例如，数列①、②的一个通项公式分别是

$$a_n=2n，n\in\{1，2，\cdots，8\},$$

$$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}，n\in\mathbf{N}_+.$$

与函数一样，数列还可以用列表法和图象法来表示.

例如，对于数列③，我们可以用如下列表的方法来直观地表示：

月份(n)	1	2	3	4	5	6
用电量(a_n)	110	120	90	80	62	80
月份(n)	7	8	9	10	11	12
用电量(a_n)	103	115	84	65	81	95

数列③也可以用图象直观地表示，如图 1.1－2.

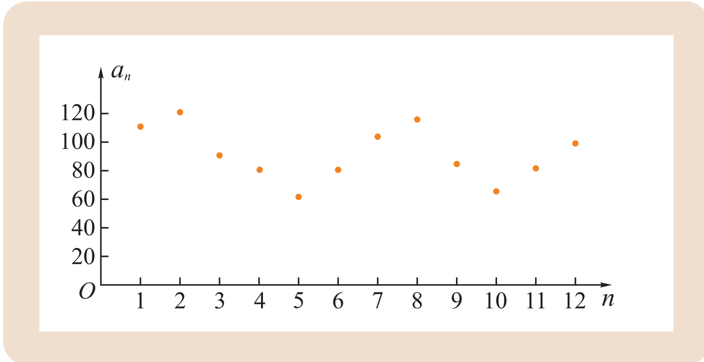


图 1.1-2

从图象上可以清楚地看到，这个家庭哪个月用电量最多，哪个月用电量最少，哪些月用电量在增加，哪些月用电量在减少，用电量随月份的变化也一目了然.

数列的图象是一系列孤立的点.

例 1 根据数列$\{a_n\}$的通项公式，写出数列的前 5 项及第 $n+1$ 项.

(1) $a_n=\dfrac{n-2}{n+1}$；　　(2) $a_n=(-1)^n\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

分析 求数列的具体项，就是求函数值.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列的前 5 项分别为 $-\dfrac{1}{2}$，0，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{2}$；用 $n+1$ 代替通项公式 $a_n=\dfrac{n-2}{n+1}$中的 n，得到数列的第 $n+1$ 项是$\dfrac{n-1}{n+2}$，即 $a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n+2}$.

(2) 依次取 $n=1$，2，3，4，5，得到数列的前 5 项分别为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，1，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，0，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；用 $n+1$ 代替通项公式 $a_n=(-1)^n\sin\dfrac{n\pi}{4}$中的 n，得到数列的第 $n+1$ 项是 $(-1)^{n+1}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}$，即 $a_{n+1}=(-1)^{n+1}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4}$.

例 2 观察下面各数列，试着找出它的一个通项公式：

(1) 2，4，2，4，…；

(2) 9，99，999，9 999，…；

(3) $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{7}{8}$，$-\dfrac{15}{16}$，….

解 (1) 因为这个数列的前 4 项为 $3-1$，$3+1$，$3-1$，$3+1$，由此得到它的一个通项公式

$$a_n=3+(-1)^n.$$

（2）因为这个数列的前 4 项为 $10-1$，10^2-1，10^3-1，10^4-1，由此得到它的一个通项公式

$$a_n=10^n-1.$$

（3）因为这个数列的前 4 项为 $(-1)^2\cdot\dfrac{2-1}{2}$，$(-1)^3\cdot\dfrac{2^2-1}{2^2}$，$(-1)^4\cdot\dfrac{2^3-1}{2^3}$，$(-1)^5\cdot\dfrac{2^4-1}{2^4}$，由此得到它的一个通项公式

$$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n-1}{2^n}.$$

思考：根据数列的前若干项写出的通项公式是唯一的吗？试举例说明（例如本节开始所列举的数列④）.

练习

1. 数 π 分别精确到 1，0.1，0.01，0.001，…的近似值（四舍五入）依次排列得到一个数列，试写出它的前 7 项，并判断此数列是有穷数列还是无穷数列.

2. 根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项及第 $2n$ 项：

（1）$a_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　（2）$a_n=|2n-5|$；

（3）$a_n=4+4\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$；　　（4）$a_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

3. 根据下列数列的前 4 项，写出它的一个通项公式：

（1）0，1，0，1，…；

（2）7，77，777，7 777，…；

（3）$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{1}{20}$，…；

（4）$\dfrac{2^2-1}{2}$，$\dfrac{3^2+1}{3}$，$\dfrac{4^2-1}{4}$，$\dfrac{5^2+1}{5}$，….

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项分别为 1，0，1，0，则下列各式可作为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的是（　　）

（A）$a_n=\dfrac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]$

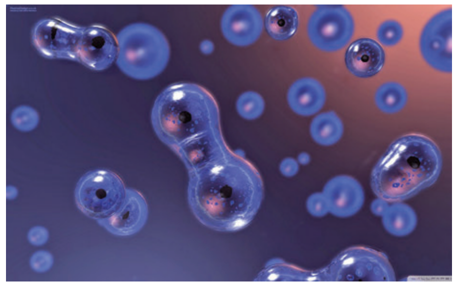
（B）$a_n=\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$

（C）$a_n=\dfrac{1}{2}[1+(-1)^{n+1}]+(n-1)(n-2)$

（D）$a_n=\dfrac{1-\cos n\pi}{2}$

（E）$a_n=\begin{cases}1，n\text{ 为奇数}，\\0，n\text{ 为偶数}\end{cases}$

例 3 某种生物细胞在实验室的培养过程中，每小时分裂一次(一个分裂为两个)，经过 12 h，由 1 个这种细胞可以繁殖成多少个细胞?



解 设经过 n h，这种细胞由 1 个可繁殖成 a_n 个，细胞的个数形成一个数列$\{a_n\}$.

由题意，细胞每小时分裂一次，得

$$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 1).$$

由 $a_1=2$，并根据 $a_{n+1}=2a_n$ 得

$$a_2=4,$$

依此类推，$a_3=2^3$，…，$a_{12}=2^{12}=4\ 096$.

因此经过 12 h，这种细胞由 1 个可繁殖成4 096 个.

像这样，如果数列$\{a_n\}$的任一项 a_{n+1}与它的前一项 a_n 之间的关系可用一个公式来表示，即 $a_{n+1}=f(a_n)$，$n\geqslant 1$，那么这个公式就叫作数列$\{a_n\}$的**递推公式**；a_1 称为数列$\{a_n\}$的**初始条件**.

由递推公式和初始条件可确定数列$\{a_n\}$，这是表示数列的又一种重要方法. 许多与数列有关的应用问题最后都归结为这种数学模型，而且这种方法便于计算机编程进行计算.

例 4 根据递推公式和初始条件

$$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+1(n\geqslant 1),\\ a_1=1,\end{cases}$$

写出数列$\{a_n\}$的前 5 项.

解 反复利用递推公式，列表如下：

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	3	7	15	31	…

于是，数列$\{a_n\}$的前 5 项分别是 1，3，7，15，31.

例 5 2 500 多年前的古希腊毕达哥拉斯学派在研究数时，喜欢把数描述成沙滩上的小石子. 他们发现 1，3，6，10，15，…这些数量的石子，都可以排成三角形(如图 1.1－3)，并称这样的数为“三角形数”. 记图中小圆的个数依次构成数列$\{a_n\}$，试写出数列$\{a_n\}$的一个递推关系.

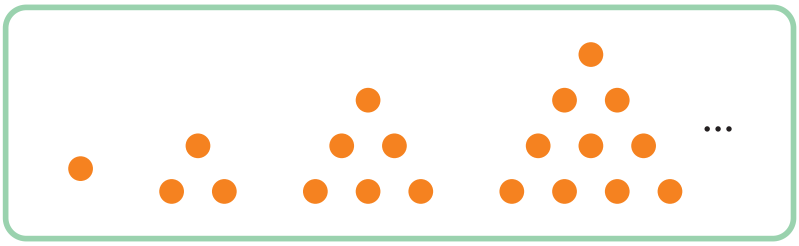


图 1.1-3

解 由图 1.1-3 可知，

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=6,\ a_4=10,$$

而且，在第 n 个“三角形数”图案的下面添加 $n+1$ 个小圆，即得到第 $n+1$ 个“三角形数”图案，因此

$$a_{n+1}=a_n+n+1(n\geqslant 1),\ a_1=1$$

为数列 $\{a_n\}$ 的一个递推关系.

练习

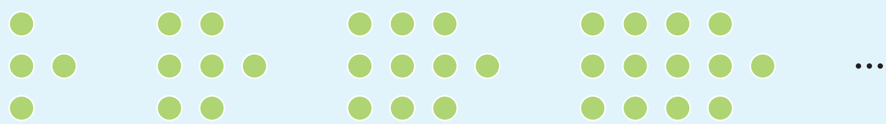
1. 写出下列数列的前 5 项：

(1) $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$；

(2) $a_1=1$，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}(n\geqslant 2)$；

(3) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1(n\geqslant 1)$.

2. 观察下图，写出点数所成数列的一个通项公式.



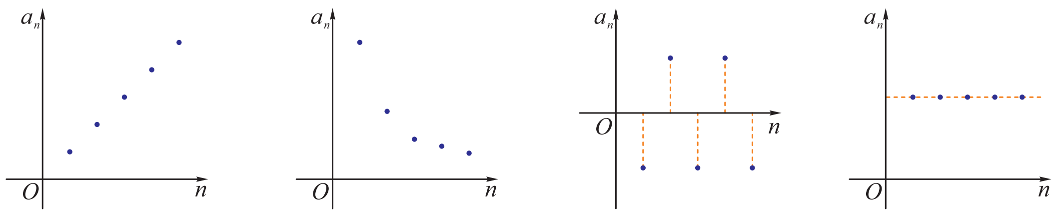
（第 2 题）

单调性是函数的重要性质. 数列也是函数，也有类似的性质. 下面，我们以本节开头给出的 5 个数列展开分析.

可以发现：对于数列①，从第 2 项起，每一项都大于它的前一项；对于数列②，从第 2 项起，每一项都小于它的前一项；对于数列③、⑤，从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项；对于数列④，它的每一项都相等.

一般地，对于一个数列 $\{a_n\}$，如果从第 2 项起，每一项都大于它的前一项，即 $a_{n+1}>a_n$，那么这个数列叫作**递增数列**；如果从第 2 项起，每一项都小于它的前一项，即 $a_{n+1}<a_n$，那么这个数列叫作**递减数列**；如果从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项，那么这个数列叫作**摆动数列**；各项都相等的数列叫作**常数列**.

从数列的图象上看(图 1.1－4)，递增数列的图象是一系列从左至右上升的孤立点，递减数列的图象是一系列从左至右下降的孤立点，摆动数列的图象是一系列从左至右有升有降的孤立点，常数列的图象是一系列从左至右呈水平状的孤立点.



递增数列　　递减数列　　摆动数列　　常数列

图 1.1－4

例 6 判断下列数列$\{a_n\}$的单调性：

(1) $a_n=1-10^n$；　　(2) $a_n=\dfrac{n-2}{n+1}$.

解 (1) 因为 $a_{n+1}-a_n=(1-10^{n+1})-(1-10^n)=-9\cdot 10^n<0$，所以 $a_{n+1}<a_n$，即数列$\{a_n\}$是递减数列.

(2) 因为 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n-1}{n+2}-\dfrac{n-2}{n+1}=\dfrac{3}{(n+2)(n+1)}>0$，所以 $a_{n+1}>a_n$，即数列$\{a_n\}$是递增数列.

例 7 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}$，判断该数列是否有最大项.若有，指出第几项最大；若没有，试说明理由.

解 因为 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{9^{n+1}(n+2)}{10^{n+1}}-\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}=\dfrac{9^n(8-n)}{10^{n+1}}$，所以当 $n<8$ 时，$a_{n+1}>a_n$，当 $n=8$ 时，$a_{n+1}=a_n$，即$a_9=a_8$，当 $n>8$ 时，$a_{n+1}<a_n$. 所以数列$\{a_n\}$有最大项，即第 8 项和第 9 项，其取值为$\dfrac{9^9}{10^8}$.

对于本题，你还有其他方法吗？

练习

1. 判断下列数列$\{a_n\}$的单调性：

(1) $a_n=7-\sqrt{n}$；　　(2) $a_n=7+2^n$；

(3) $a_n=\lg(n^2+1)$；　　(4) $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=|3n-19|$，画出数列$\{a_n\}$的图象，并求数列的最小项.

习题 1.1

学而时习之

1. 分别写出下面的数列：

(1) 在区间[100，200]内，能被 6 整除的整数按从小到大的顺序构成的数列；

(2) $\sqrt{2}$ 分别精确到 1，0.1，0.01，0.001，0.000 1，0.000 01 的近似值(四舍五入)依次排列构成的数列.

2. 根据通项公式 $a_n=2(1+3n)$，填写下表：

n	1	2	3	…	11	…		…	
a_n				…		…	128	…	602

3. 观察下面数列的变化规律，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式.

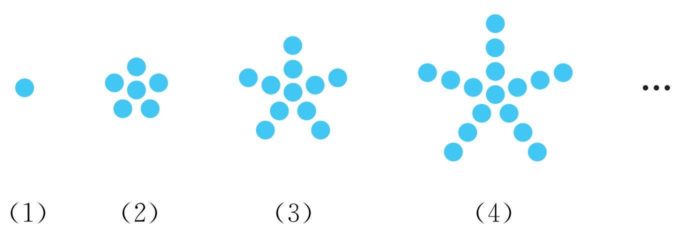
(1) (　　)，7，12，(　　)，22，27，…；

(2) -1，$\frac{1}{2}$，(　　)，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，(　　)，…；

(3) 1，$\sqrt{2}$，(　　)，2，$\sqrt{5}$，(　　)，$\sqrt{7}$，…；

(4) $\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，(　　)，$\frac{1}{4\times5}$，….

4. 观察下图，写出点数所成数列的一个通项公式.



(第 4 题)

5. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{\cos n\pi}{2}$，写出它的前 4 项及第 $4n$ 项.

6. 写出下面数列的前 5 项：

(1) $\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+2,\\a_1=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n,\\a_1=3.\end{cases}$

7. 满足 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 一定是递增数列吗？为什么？

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-2n^2+15n-1$，画出该数列的图象，并判断该数列是否有最大项．若有，指出第几项最大；若没有，试说明理由．

温故而知新

9. 已知无穷数列 1×2，2×3，3×4，…，$n(n+1)$，….

(1) 求这个数列的第 10 项和第 31 项．

(2) 420 是不是这个数列中的项？如果是，是第几项？

(3) 证明：60 不是这个数列中的项．

10. 对于任意数列 $\{a_n\}$，等式 $a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n$ 都成立．试根据这一结论，求解：

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2$，求通项公式 a_n．

11. 一列火车从 A 城驶往 B 城，铁路上设有 10 个车站（包括起点站 A 和终点站 B）．火车上附有一节邮政车厢，每停靠一站都要卸下前面各站发往该站的邮袋各一个，同时又装上该站发往后面各站的邮袋各一个．设从第 n 站出发时，邮政车厢内的邮袋数为 a_n，$1\leqslant n\leqslant 10$，写出 $\{a_n\}$ 的前 4 项．

12. 某人于某年初在银行存入一年期定期储蓄 2 万元，到期后把本息续存一年期定期储蓄，以后每次到期后都按上述方式续存．设银行一年期定期储蓄的年利率为 1.5%，该储户存满 n 年后所能得到的本利为 a_n 万元，试写出 $\{a_n\}$ 的前 3 项．

13. 已知 $a_n=\dfrac{n-\sqrt{98}}{n-\sqrt{99}}$，求该数列前 30 项中的最大项和最小项．

1.2 等差数列

1.2.1 等差数列及其通项公式

在现实生活中，我们会遇到下面的特殊数列：

（1）全国统一鞋号中，成年女鞋的各种尺码(单位：cm)由大至小可组成数列

$$25,\ 24.5,\ 24,\ 23.5,\ 23,\ 22.5,\ 22,\ 21.5,\ 21. \tag{①}$$

（2）某住宅小区 2013—2017 年的绿化建设有如下数据：

年　份	2013	2014	2015	2016	2017
绿化覆盖率/%	15.8	17.8	19.8	21.8	23.8

2013—2017 年各年的绿化覆盖率组成数列

$$15.8\%,\ 17.8\%,\ 19.8\%,\ 21.8\%,\ 23.8\%. \tag{②}$$

（3）黄白两种颜色的正六边形按如图 1.2－1 的规律拼成一系列图案．图案中白色正六边形的个数依次构成数列

$$6,\ 10,\ 14,\ \cdots. \tag{③}$$

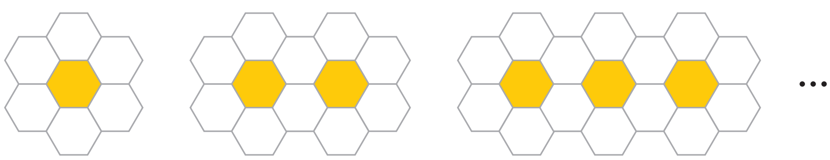


图 1.2－1

这些数列有什么共同的特点呢？

研究这些数列的特征及变化规律，我们可以发现：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于－0.5；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 2%；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 4.

也就是说，这些数列有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都等于同一个常数，那么这个数列称为**等差数列**，这个常数叫作等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示.

数列①、②、③均为等差数列，它们的公差分别为 -0.5，2%，4.

数列的通项公式决定了数列的每一项，也就决定了数列的全部性质，因此通项公式是研究数列的重要依据.

你能找出数列①、②、③的通项公式吗？

一般地，如果数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，那么根据等差数列的定义，可以得到

$$a_2-a_1=d,$$
$$a_3-a_2=d,$$
$$a_4-a_3=d,$$
$$\cdots,$$
$$a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant 2).$$

把这 $n-1$ 个等式相加得

$$a_n-a_1=(n-1)d.$$

由此得到

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

当 $n=1$ 时，该等式的两边均是 a_1，这表明该等式对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立，因而它就是**等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式**.

据此，我们可以得到数列①、②、③的通项公式分别为

$$a_n=25+(n-1)\times(-0.5)=-0.5n+25.5,$$
$$a_n=15.8\%+(n-1)\times 2\%=2n\%+13.8\%,$$
$$a_n=6+(n-1)\times 4=4n+2.$$

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(1) 如果 $a_1=5$，$a_2=2$，求公差 d 和 a_3；

(2) 如果 $a_3=5$，$a_2=2$，求公差 d 和 a_1.

解 由等差数列的定义，可知

(1) 公差 $d=a_2-a_1=-3$，$a_3=a_2+d=-1$.

(2) 公差 $d=a_3-a_2=3$，$a_1=a_2-d=-1$.

例 2 证明：a，b，c 三数成等差数列的充要条件是 $2b=a+c$.

证明 如果 a，b，c 成等差数列，由等差数列的定义得 $b-a=c-b$，那么 $2b=a+c$.

反过来，如果 $2b=a+c$，那么 $b-a=c-b$，由等差数列的定义知，a，b，c 成等差数列.

因此，a，b，c 三数成等差数列的充要条件是 $2b=a+c$.

在两个数 a，b 之间插入数 M，使 a，M，b 成等差数列，则 M 称为 a 与 b 的**等差中项**.

例 3 已知等差数列 8，5，2，….

（1）求该数列的第 20 项.

（2）试问 -121 是不是该等差数列的项？如果是，指明是第几项；如果不是，试说明理由.

（3）该数列共有多少项位于区间 $[-200, 0]$ 内？

解 记该等差数列为 $\{a_n\}$，公差为 d，由 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，得数列的通项公式是

$$a_n=8-3(n-1)=-3n+11.$$

（1）该数列的第 20 项 $a_{20}=-3\times20+11=-49$.

（2）如果 -121 是这个数列的项，则方程

$$-3n+11=-121$$

有正整数解. 解这个方程，得 $n=44$，故 -121 是该等差数列的第 44 项.

（3）解不等式

$$-200\leqslant-3n+11\leqslant0,$$

得

$$\frac{11}{3}\leqslant n\leqslant\frac{211}{3},$$

因此，该数列位于区间 $[-200, 0]$ 内的项从第 4 项起直至第 70 项，共有 67 项.

练 习

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

（1）如果 $a_1=2$，$a_3=4$，求公差 d 和 a_2；

（2）如果 $a_2=4$，$a_3=2$，求公差 d 和 a_1.

2. 求证：$\triangle ABC$ 的三个内角的度数构成等差数列的充要条件是 $\triangle ABC$ 中有一个内角为 60°.

3. -30 是不是等差数列 $\frac{3}{2}$，0，$-\frac{3}{2}$，…的项？如果是，是第几项？如果不是，试说明理由.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_6=-24$，$a_{30}=-48$，求首项 a_1 与公差 d.

5. 设 a_k，a_l，a_m，a_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的项，且 $k+l=m+n\ (k, l, m, n\in\mathbf{N}_+)$. 求证：$a_k+a_l=a_m+a_n$.

1.2.2 等差数列与一次函数

数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}_+$（或它的有限子集$\{1, 2, \cdots, n\}$）为定义域的函数 $a_n=f(n)$，因而可以利用函数知识来研究数列的性质．我们先看两个具体例子：

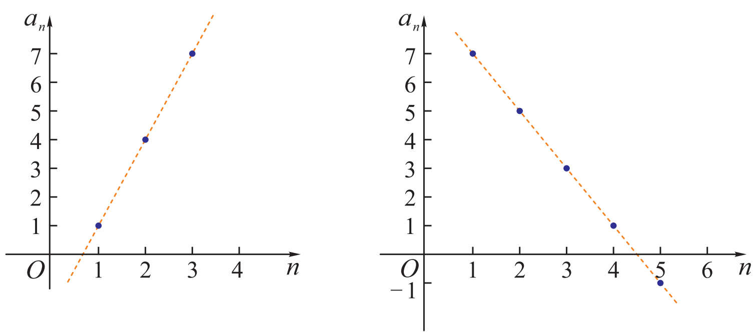
求下列等差数列$\{a_n\}$的通项公式，并画出这个数列的图象，判断数列的单调性：

（1）$a_1=1$，$d=3$；　　　　（2）$a_1=7$，$d=-2$.

不难求得，等差数列$\{a_n\}$的通项公式分别为：

（1）$a_n=3n-2$；　　　　（2）$a_n=-2n+9$.

上述通项公式可以看成自变量 n 取正整数值的函数，将通项公式中的正整数自变量 n 换成实数自变量 x，得到一次函数 $y=3x-2$ 和 $y=-2x+9$，它们的图象都是直线．当 x 取正整数值 n 时，就得到 a_n，等差数列的图象由直线上横坐标为正整数 n 的孤立点(n, a_n)组成．如图 1.2-2(1)、(2)所示．



（1）　　　　（2）

图 1.2-2

由于一次函数 $y=3x-2$ 的一次项系数 $3>0$，函数递增，因此数列 $a_n=3n-2$ 也递增；而一次函数 $y=-2x+9$ 的一次项系数 $-2<0$，函数递减，因此数列 $a_n=-2n+9$ 也递减.

对于一般的等差数列$\{a_n\}$，其通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$，将其中的正整数自变量 n 换成实数自变量 x，得到

$$y=a_1+(x-1)d=dx+(a_1-d),$$

当 $d\neq0$ 时，是一次函数(其中一次项系数为等差数列的公差 d)；当 $d=0$ 时，$y=a_1$ (a_1 为常数)，这两种情形的函数图象都是直线．等差数列的图象由这条直线上横坐标为正整数 n 的孤立点(n, a_n)组成.

当 $d>0$ 时，直线 $y=dx+(a_1-d)$从左至右上升，等差数列$\{a_n\}$递增；当 $d<0$ 时，直线 $y=dx+(a_1-d)$从左至右下降，等差数列$\{a_n\}$递减；当 $d=0$ 时，$y=a_1$ 为水平方向的直线，数列为常数列.

例 4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=pn+q$，其中 p，q 为常数，且 $p\neq 0$，那么这个数列一定是等差数列吗？

解 取数列$\{a_n\}$中任意相邻两项 a_n 与 $a_{n-1}(n\geqslant 2)$，作差得

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=pn+q-[p(n-1)+q]\\&=p,\end{aligned}$$

它是一个与 n 无关的常数，所以数列$\{a_n\}$一定是等差数列，且一次项系数 p 为该等差数列的公差.

例 5 已知$(2,\ -1)$，$(4,\ -7)$是等差数列$\{a_n\}$的图象上的两点.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 画出数列$\{a_n\}$的图象；

(3) 判断数列$\{a_n\}$的单调性.

解 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d.

因为$(2,\ -1)$，$(4,\ -7)$是等差数列$\{a_n\}$的图象上的两点，所以

$$a_2=-1,\quad a_4=-7,$$

即

$$\begin{cases}a_1+d=-1,\\a_1+3d=-7,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=2,\\d=-3.\end{cases}$$

因此，$a_n=a_1+(n-1)d=-3n+5$.

(2) 等差数列$\{a_n\}$的图象是均匀分布在直线 $y=-3x+5$ 上的一系列孤立点，如图 1.2-3.

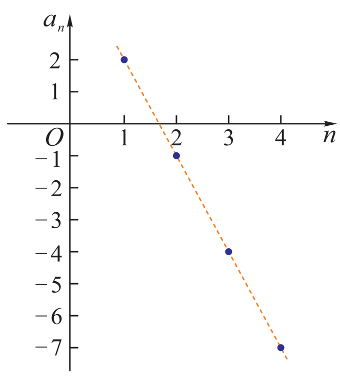


图 1.2-3

(3) 因为公差 $d=-3<0$，所以等差数列$\{a_n\}$为递减数列.

例 6 已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_p=q$，$a_q=p$（p，$q\in\mathbf{N}_+$，$p\neq q$），求 a_{p+q}的值.

解 （方法一）设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，则

$$\begin{cases}a_1+(p-1)d=q,\\a_1+(q-1)d=p,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=p+q-1,\\d=-1.\end{cases}$$

因此，$a_{p+q}=(p+q-1)+(p+q-1)\times(-1)$
$=0.$

（方法二）设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，则

$$a_p=a_1+(p-1)d, \quad ①$$

$$a_q=a_1+(q-1)d. \quad ②$$

①－②得

$$a_p-a_q=(p-q)d,$$

则

$$\frac{a_p-a_q}{p-q}=d. \quad ③$$

③式从函数的观点看，等差数列$\{a_n\}$的任意两项的函数值之差与相应自变量之差的比为公差 d.

于是将 a_p，a_q 与 a_{p+q}，a_q 分别代入③式得

$$\frac{q-p}{p-q}=d=\frac{a_{p+q}-p}{(p+q)-q},$$

解得 $a_{p+q}=0$.

练 习

1. 已知(4，19)，(7，10)为等差数列$\{a_n\}$的图象上的两点.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 画出数列$\{a_n\}$的图象；

(3) 判断数列$\{a_n\}$的单调性.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$，则下列四个命题中真命题为（　　）

(A) 数列$\{a_n\}$是递增数列

(B) 数列$\{|a_n|\}$是递增数列

(C) 数列$\{a_n^2\}$是递增数列

(D) 数列$\{a_n+3nd\}$是递增数列

1.2.3 等差数列的前 n 项和

高斯（1777—1855），著名数学家，近代数学奠基者之一．与阿基米德、牛顿并列为历史上最伟大的数学家．

被世人誉为“数学王子”的德国数学家高斯在幼年就显示出过人的数学天赋，他的老师布置了一道看上去很难的题，计算

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

高斯经过细致的观察，迅捷地报出了得数：5 050．在老师与同学露出惊讶之色时，他解释了自己的思考过程：将这 100 个数分成 50 个数对，其中 $1+100=101$，$2+99=101$，…，$50+51=101$，于是 100 个数的和就是 50 个 101，即 $50\times101=5\ 050$．

高斯的算法实际上解决了求等差数列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

前 100 项之和的问题．

事实上，古代的中国人和希腊人也是这么求等差数列之和的．例如，我国南宋数学家杨辉提出了这样一个问题：“今有圭垛草一堆，顶上一束，底阔八束．问共几束？答：36 束．”他的计算方法可以用图 1.2－4 来表示．

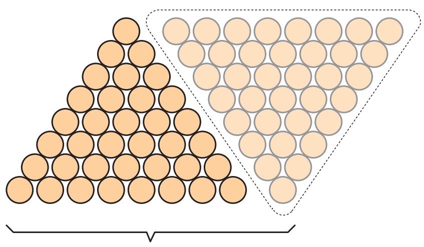


图 1.2－4

设想有另外一堆同样的草，将其倒置，并和原来的草堆拼在一起，这就得到 8×9 的草堆，一共 72 束，因此原来的草堆共有 36 束．

前人计算等差数列前 n 项和的方法的确巧妙，那么这种方法能推广到求一般等差数列的前 n 项和吗？

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,$$

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ①$$

再将项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+\cdots+[a_n-(n-1)d], \quad ②$$

将①、②式的两边分别相加，得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)=n(a_1+a_n).$$

由此得到**等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和的公式**

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

这个公式表明，等差数列的前 n 项和可由首项、末项和项数唯一确定.

又因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上述公式又可以写成

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

这个公式表明，等差数列的前 n 项和可由首项、公差和项数唯一确定.

从结构特征上看，这里呈现的两个求和公式有何不同？

例 7 某体育场一角的看台共有 20 排，每一排都比前一排多两个座位，第一排有 15 个座位. 问体育场这一角里共有多少个座位？

解 设第 n 排的座位有 a_n 个，则得到的数列$\{a_n\}$ $(1\leqslant n\leqslant 20)$是首项为 15，公差为 2 的等差数列.

根据等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，这一角里总共的座位数为

$$S_{20}=20\times 15+\frac{20\times 19}{2}\times 2=680.$$

例 8 已知一个等差数列的前 10 项和是 310，前 20 项和是 1 220，求该数列的前 n 项和.

解 记该数列为$\{a_n\}$，公差为 d.

由等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得

$$\begin{cases}S_{10}=10a_1+45d=310,\\ S_{20}=20a_1+190d=1\ 220.\end{cases}$$

解这个关于 a_1 与 d 的方程组，得

$$\begin{cases}a_1=4,\\ d=6.\end{cases}$$

因此，该数列的前 n 项和为

$$S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 6=3n^2+n.$$

例 9 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+2n$，求证：$\{a_n\}$是等差数列.

证明 根据

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

与

$$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}(n\geqslant 2)$$

可知，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]\\&=2n+1.\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$，也满足上式.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}_+)$.

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n-a_{n-1}=2n+1-[2(n-1)+1]=2,$$

所以数列$\{a_n\}$是以 3 为首项，以 2 为公差的等差数列.

例 10 已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=25$，$S_{17}=S_9$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求 S_n 的最大值及对应的 n 值.

解 （1）记数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $S_{17}=S_9$ 得

$$17a_1+\frac{17\times 16}{2}d=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d.$$

又 $a_1=25$，解得 $d=-2$，所以

$$a_n=a_1+(n-1)d=27-2n.$$

（2）因为
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\\&=-n^2+26n\\&=-(n-13)^2+169,\end{aligned}$$

所以当 $n=13$ 时，S_n 取最大值，$S_{13}=169$.

> 等差数列的前 n 项和 S_n 的表达式可以看成关于 n 的二次函数，我们可利用二次函数的性质求 S_n 的最值.

练习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

（1）7，5，3，1，-1，…； （2）$a_1=2$，$a_n=18$，$n=9$；

（3）$a_1=12$，$d=-2$，$n=20$.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_3=9$，$S_6=36$，求 S_9.

3. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+n$，求$\{a_n\}$的通项公式.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_4=1$，$S_5=10$，求 S_n 取得最大值时对应的 n 值.

习题 1.2

学而时习之

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1) 已知 $a_1=-1$，$d=3$，求 a_{10}；

(2) 已知 $a_4=4$，$a_8=-4$，求 d；

(3) 已知 $a_1=1$，$d=3$，$a_n=2\ 017$，求 n.

2. 已知等差数列$\{a_n\}$，k 是小于 n 的正整数，a_n 是 a_{n-k}和 a_{n+k}的等差中项吗?

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，求 a_{12}的值.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_4+a_7=39$，$a_2+a_5+a_8=33$，求 $a_3+a_6+a_9$ 的值.

5. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{17}=66$，通项公式 $a_n=pn+q$，其中 p，q 为常数，$p\neq 0$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 88 是否是数列$\{a_n\}$中的项?

6. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项和为 S_n，求解下列问题：

(1) 若 $a_2+a_5=19$，$S_5=40$，求 a_1；

(2) 若 $S_{12}=84$，$S_{20}=460$，求 S_{28}；

(3) 若 $a_{10}=30$，$a_{20}=50$，$S_n=242$，求 n.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{1}{2}$，且 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$，求它的前 100 项之和 S_{100}.

8. (中国古代数学问题)《张丘建算经》有如下问题：今有女善织，日益功疾. 初日织五尺，今一月日织九匹三丈. 问日益几何? 其意思是：有一位女子很会织布，一天比一天织得快，而且每天增加的长度都是一样的. 已知第一天织 5 尺，经过一个月(30 天)后，共织布 9 匹 3 丈. 问每天多织布多少尺?(注：1 匹=4 丈，1 丈=10 尺.)

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，从结构特征看$\frac{S_n}{n}$有何数学含义? 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列吗?

10. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2n^2-30n$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求S_n的最小值及对应的n值.

11. 一个梯形两底边长分别为 12 cm 和 22 cm，将梯形一腰 10 等分，过每一分点作平行于梯形底边的直线，求这些直线夹在梯形两腰间的线段的长度之和.

12. 甲、乙两物体分别从相距 70 m 的两处同时相向运动，甲第 1 分钟走 2 m，以后每分钟比前 1 分钟多走 1 m，乙每分钟走 5 m.

(1) 甲、乙开始运动后几分钟相遇？

(2) 如果甲、乙到达对方起点后立即返回，甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1 m，乙继续每分钟走 5 m，那么开始运动几分钟后第二次相遇？

温故而知新

13. 已知直角三角形的三边成等差数列，求证：三边之比为 3∶4∶5.

14. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，若以第 2 项为首项，每隔两项取出一项组成一个新的数列$\{b_n\}$，那么这个数列是等差数列吗？若是，求其公差，其中b_n为数列$\{a_n\}$的第几项？

15. 已知平面凸n边形$(n\geqslant 3)$的内角和为$(n-2)\cdot 180°$，若一凸n边形各内角的度数成等差数列，公差是$10°$，最小内角是$100°$，求n.

16. 如果一个数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=pn^2+qn+r$，其中p，q，r为常数，且$p\neq 0$，那么这个数列是等差数列吗？

17. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=20$，公差$d=-\dfrac{5}{2}$，令$b_n=|a_n|$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

18. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

(1) 求证：S_2，S_4-S_2，S_6-S_4成等差数列；

(2) 求证：S_3，S_6-S_3，S_9-S_6成等差数列；

(3) 试推广(1)和(2)的结果，写出你的结论并加以证明.

1.3 等比数列

1.3.1 等比数列及其通项公式

在现实生活中，我们还会遇到下面一类特殊数列.

(1) 计算机的内存容量通常是指随机储存器(RAM)的容量，是内存条的关键性参数. 进入 21 世纪以来，计算机中主流采用的内存容量(单位：MB)从小到大组成数列

$$128, 256, 512, 1\,024, 2\,048, 4\,096, 8\,192. \quad ①$$

(2) 若某张报纸的厚度记为 t，面积记为 A，将其重复对折 6 次，可得到如下表所示的数据：

对折次数	报纸厚度	报纸面积
0	$t=2^0 \cdot t$	$A=\frac{1}{2^0}A$
1	$2t=2^1 \cdot t$	$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2^1}A$
2	$4t=2^2 \cdot t$	$\frac{1}{4}A=\frac{1}{2^2}A$
3	$8t=2^3 \cdot t$	$\frac{1}{8}A=\frac{1}{2^3}A$
4	$16t=2^4 \cdot t$	$\frac{1}{16}A=\frac{1}{2^4}A$
5	$32t=2^5 \cdot t$	$\frac{1}{32}A=\frac{1}{2^5}A$
6	$64t=2^6 \cdot t$	$\frac{1}{64}A=\frac{1}{2^6}A$

对折过程中报纸厚度和报纸面积分别组成数列：

$$2^0 \cdot t, 2^1 \cdot t, 2^2 \cdot t, 2^3 \cdot t, 2^4 \cdot t, 2^5 \cdot t, 2^6 \cdot t. \quad ②$$

$$\frac{1}{2^0}A, \frac{1}{2^1}A, \frac{1}{2^2}A, \frac{1}{2^3}A, \frac{1}{2^4}A, \frac{1}{2^5}A, \frac{1}{2^6}A. \quad ③$$

(3) 图 1.3 - 1 中的三角形图案称为谢宾斯基三角形. 图案中绿色三角形的个数依次组成数列

$$1, 3, 9, 27, \cdots. \quad ④$$

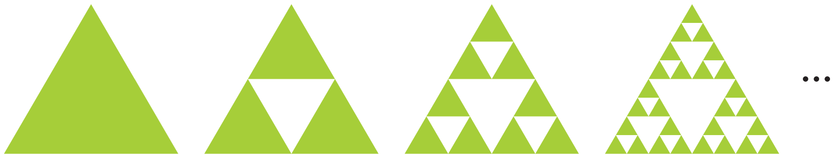


图 1.3-1

这些数列有什么共同的特点呢?

研究这些数列的特征及变化规律，我们可以发现：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于 2；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于 2；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于$\frac{1}{2}$；

对于数列④，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于 3.

也就是说，这些数列有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于同一个常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项之比都等于同一个常数，那么这个数列称为**等比数列**，这个常数叫作等比数列的**公比**. 公比通常用字母 q 表示($q\neq 0$).

数列①、②、③、④均为等比数列，它们的公比分别为 2，2，$\frac{1}{2}$，3.

数列①、②、③、④存在通项公式吗？如果存在，分别是什么呢？

一般地，如果数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公比为 q，那么根据等比数列的定义，可以得到

$$\frac{a_2}{a_1}=q，\frac{a_3}{a_2}=q，\cdots，\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geqslant 2)，$$

把这 $n-1$ 个等式的两边分别相乘得

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

当 $n=1$ 时，该等式的两边都是 a_1，这表明该等式对任意 $n\in\mathbf{N}_+$都成立，因而它就是**等比数列$\{a_n\}$的通项公式.**

据此，我们可以得到数列①、②、③、④的通项公式分别为

$$a_n=128\times 2^{n-1}=2^{n+6}，$$

$$a_n=2^0t\times 2^{n-1}=2^{n-1}t，$$

$$a_n=\frac{1}{2^0}A\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A，$$

$$a_n=1\times 3^{n-1}=3^{n-1}.$$

例 1 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列.

（1）若 $a_2=2$，$a_5=54$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $a_1=125$，$q=0.2$，$a_n=3.2\times10^{-4}$，求 n.

解 （1）由等比数列的通项公式可知，

$$\begin{cases} a_1q=2, & ① \\ a_1q^4=54. & ② \end{cases}$$

这是一个关于 a_1 和 q 的方程组，②÷①得

$$q^3=27，即 q=3.$$

因此，$a_1=\frac{2}{3}$.

因此，这个数列的通项公式是 $a_n=\frac{2}{3}\times3^{n-1}=2\times3^{n-2}$.

（2）由等比数列的通项公式，得

$$a_n=a_1q^{n-1}=125\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=5^{4-n}.$$

又 $a_n=3.2\times10^{-4}=5^{-5}$，

因此，$5^{4-n}=5^{-5}$，即 $n=9$.

例 2 证明：非零实数 a，b，c 成等比数列的充要条件是 $b^2=ac$.

证明 如果非零实数 a，b，c 成等比数列，由等比数列的定义得$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，那么 $b^2=ac$.

反过来，如果非零实数 a，b，c 满足 $b^2=ac$，那么$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，由等比数列的定义知，a，b，c 成等比数列.

因此，非零实数 a，b，c 成等比数列的充要条件是 $b^2=ac$.

在两个数 a，b 之间插入数 G，使 a，G，b 成等比数列，则 G 称为 a 与 b 的**等比中项**.

例 3 某污水处理厂采用技术手段清除水中污染物的同时，还能生产出有用的肥料和清洁用水，在处理过程中，每小时可以从处理池中清除掉残留污染物的 12%.

（1）一天后污染物含量降低到什么程度？

（2）使污染物含量减半至少要多少小时（结果保留整数）？

解 设污水中污染物的初始含量为 a_0，又设 n h 后残留在池中的污染物含量为 a_n，这个问题的数学模型是数列$\{a_n\}$，它满足

$$\begin{cases} a_{n+1}=(1-12\%)a_n=0.88a_n, \\ a_1=0.88a_0. \end{cases}$$

因此，数列$\{a_n\}$是以 $0.88a_0$ 为首项，以 0.88 为公比的等比数列.

利用通项公式，得 $a_n=0.88^n a_0$.

（1）$a_{24}=0.88^{24}a_0\approx 0.05a_0$，

所以一天后污染物含量大约降低到原来的 5%.

（2）为求何时污染物含量会减半，从 $a_n=0.88^n a_0=0.5a_0$ 解出 n，得

$$n=\log_{0.88}0.5\approx 5.42.$$

故使污染物含量减半至少要 6 h.

练习

1. 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，试根据所给条件填写下表：

题号	a_1	q	n	a_n
（1）	0.03	9	6	
（2）		-2	7	32
（3）	1	2		256

2. 求出下列等比数列中的未知项：

（1）3，a，27；　　（2）$-\frac{1}{2}$，a，b，$\frac{1}{16}$.

3. 设 a_k，a_l，a_m，a_n 是等比数列$\{a_n\}$的项，且 $k+l=m+n(k，l，m，n\in \mathbf{N}_+)$，求证：$a_ka_l=a_ma_n$.

4. （1）在自然界，死亡生物体中的^{14}C有持续稳定的衰变现象. 已知^{14}C的半衰期为 5 730 年，设^{14}C的衰变率为 q，试建立一个用^{14}C确定生物体死亡时间的模型.

（2）考古学家发现一个古人猿的颅骨，测得该颅骨仅残留原^{14}C含量的 1%，那么古人猿的颅骨已存在了大约多少年?

1.3.2 等比数列与指数函数

类比等差数列，下面我们从函数的角度来研究等比数列$\{a_n\}$．先看几个例子：

已知等比数列$\{a_n\}$分别满足：

（1）$a_1=3$，$q=2$；　　（2）$a_1=3$，$q=\frac{1}{2}$；

（3）$a_1=-3$，$q=2$；　　（4）$a_1=-3$，$q=\frac{1}{2}$．

不难求得这四个等比数列的通项公式分别为：

（1）$a_n=3\times 2^{n-1}$；　　（2）$a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；

（3）$a_n=-3\times 2^{n-1}$；　　（4）$a_n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$．

上述通项公式可以看成自变量n取正整数值的函数，它们的公比都是正数，将通项公式中的正整数自变量n换成实数自变量x，得到函数$y=\frac{3}{2}\cdot 2^x$，$y=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=-\frac{3}{2}\cdot 2^x$，$y=-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$，它们都是一个非零常数$c\left(c=\frac{a_1}{q}\right)$与指数函数$y=q^x$(指数函数的底数为公比)的乘积：$y=cq^x$．由指数函数$y=q^x$的图象可以得出$y=cq^x$的图象，而$y=cq^x$的图象上横坐标为正整数$n$的孤立点$(n，a_n)$组成上述等比数列的图象，如图1.3-2(1)～(4)．

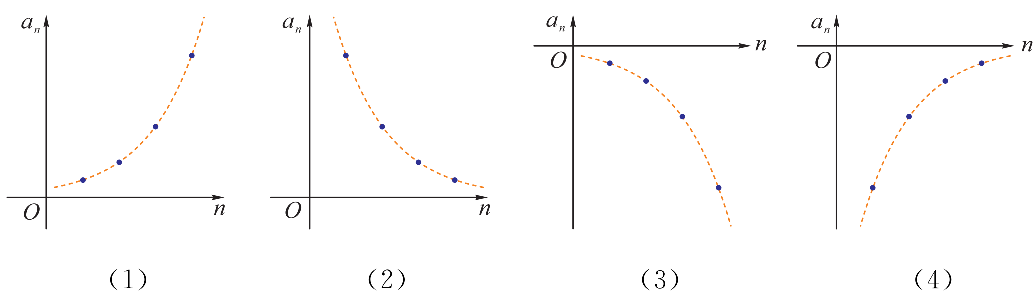


图1.3-2

我们由指数函数的图象得到等比数列的图象，接下来就可以借助函数$y=cq^x$的性质来分析等比数列的单调性．

显然，当$q>1$时，指数函数$y=q^x$递增；当$0<q<1$时，指数函数$y=q^x$递减．

若$a_1>0$，$q>0$，那么$c>0$．则当$q>1$时，函数$y=cq^x$递增，数列$a_n=a_1q^{n-1}$递增，如数列(1)；当$0<q<1$时，函数$y=cq^x$递减，数列$a_n=a_1q^{n-1}$递减，如数列(2)．

若$a_1<0$，$q>0$，那么$c<0$．则当$q>1$时，函数$y=cq^x$递减，数列$a_n=a_1q^{n-1}$递减，如数列(3)；当$0<q<1$时，函数$y=cq^x$递增，数列$a_n=a_1q^{n-1}$递增，如数列(4)．

值得指出的是，当等比数列的公比 $q=1$ 时，等比数列的各项都为常数 a_1，其图象是一系列从左至右呈水平状的孤立点.

而当等比数列的公比 $q<0$ 时，例如等比数列的通项公式为 $a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，此时如果将 n 换成实数 x，得到 $y=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}$，当 x 不为整数时没有意义，因此这样的等比数列不能通过指数函数来研究. 当 n 为奇数时，$a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0$，当 n 为偶数时，$a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}<0$，可见该数列是摆动数列，既不递增也不递减，反映在图象上是一系列上下波动的孤立的点(如图 1.3-3).

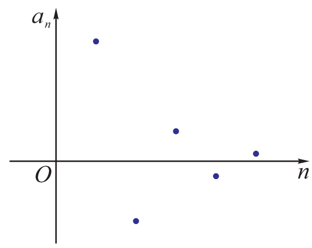


图 1.3-3

例 4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=A\cdot q^n$，其中 A，q 均为非零常数，那么这个数列一定是等比数列吗?

解 取数列$\{a_n\}$中任意相邻两项 a_n 与 $a_{n-1}(n\geqslant 2)$，作商得

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{A\cdot q^n}{A\cdot q^{n-1}}=q,$$

它是一个与 n 无关的非零常数，所以$\{a_n\}$一定是等比数列，且指数幂的底数即为等比数列的公比.

例 5 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的等比数列，求证：$\{a_nb_n\}$也是等比数列.

证明 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公比分别为 p，q，那么数列$\{a_nb_n\}$的第 n 项与第 $n+1$ 项分别为 $a_nb_n=a_1p^{n-1}\cdot b_1q^{n-1}$ 与 $a_{n+1}b_{n+1}=a_1p^n\cdot b_1q^n$.

因为

$$\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\frac{a_1p^n\cdot b_1q^n}{a_1p^{n-1}\cdot b_1q^{n-1}}=pq,$$

它是一个与 n 无关的常数，所以$\{a_nb_n\}$是一个以 pq 为公比的等比数列.

> ? 想一想，数列$\{a_n+b_n\}$是否是等比数列?

特别地，如果$\{a_n\}$是等比数列，c 是非零常数，那么$\{ca_n\}$是等比数列.

例 6 已知$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的数列.

(1) 若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=10^{a_n}$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列；

（2）若数列$\{a_n\}$是公比为 q 的正项等比数列，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\lg a_n$，证明数列$\{b_n\}$是等差数列.

证明　（1）因为 $10^{a_n}\neq 0$，所以$\dfrac{10^{a_{n+1}}}{10^{a_n}}=10^{a_{n+1}-a_n}=10^d$，因此，数列$\{10^{a_n}\}$是公比 $q=10^d$的等比数列.

（2）因为 $a_n>0$，所以 $\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lg q$，因此，数列$\{\lg a_n\}$是公差 $d=\lg q$ 的等差数列.

练习

1. 设$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，则“$q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的(　　)

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2. 已知等比数列$\{a_n\}$是递减数列，若 a_1，a_3 是方程 $x^2-5x+4=0$ 的两个根，求 a_1 和 q.

3. 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，数列$\{\sqrt{a_n}\}$是等比数列吗?

1.3.3　等比数列的前 n 项和

相传，古印度的舍罕王准备奖赏国际象棋的发明者——达依尔宰相. 达依尔对国王说：“我有一个简单的愿望，请您在棋盘的第一个方格放一粒小麦，在第二个方格放两粒，第三个方格放四粒，以此类推，每一方格的麦粒数都是前一方格麦粒数的两倍. 这就是我想要的.”国王觉得要求不高，就慷慨地答应了宰相的要求，国王真的能兑现他对宰相许下的诺言吗?

我们来计算一下所需麦粒数：

每一个方格内的麦粒数依次为 1，2，2^2，2^3，…，2^{63}，其总和记为 S_{64}，则

$$S_{64}=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{62}+2^{63}. \quad ①$$

①式右边每一项的 2 倍是它的后一项，因此

$$2S_{64}=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}+2^{64}. \quad ②$$

由②－①可得

$$S_{64}=2^{64}-1.$$

这是一个二十位数，将这个数字的小麦折算成质量(假设千粒麦子重 40 g)，超

过 7 000 亿吨. 据统计，2017 年全世界小麦总产量约为 7.5 亿吨，由此看来，国王根本不可能兑现他的诺言.

仿照上面的计算方法，我们来寻求等比数列前 n 项和的计算公式.

一般地，设公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和是

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n. \qquad ①$$

将①式两端同时乘以公比 q，由 $a_n=qa_{n-1}$得

$$qS_n=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+a_{n+1}, \qquad ②$$

由①−②得

$$(1-q)S_n=a_1-a_{n+1}=a_1(1-q^n),$$

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

由此得到**等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和的公式**

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1),\\ na_1 & (q=1).\end{cases}$$

这个公式表明，等比数列的前 n 项和可由首项、公比和项数唯一确定.

又因为 $a_n=a_1q^{n-1}$，所以上述公式又可以写成

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq1),\\ na_1 & (q=1).\end{cases}$$

这个公式表明，等比数列的前 n 项和可由首项、公比和末项唯一确定.

例 7 求等比数列 27，−9，3，…，$\dfrac{1}{243}$的各项的和.

解 将该等比数列记作$\{a_n\}$，则 $a_1=27$，$q=-\dfrac{1}{3}$，$a_n=\dfrac{1}{243}$.

因此

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{27-\frac{1}{243}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{4\ 921}{243}.$$

例 8 某制糖厂第一年制糖 5 万吨，如果平均每年的产量比上一年增加 10%，那么从第一年起，约几年内可使总产量达到 30 万吨(结果保留到个位)?

解 设制糖厂第 n 年的产量为 a_n 万吨. 由题意，$\{a_n\}$是一个等比数列，其中

$$a_1=5,\ q=1+10\%=1.1.$$

由于 $S_n=30$，

所以
$$\frac{5(1-1.1^n)}{1-1.1}=30.$$

整理后，得

$$1.1^n=1.6.$$

两边取对数，得

$$n\lg 1.1=\lg 1.6.$$

用计算器求得

$$n=\frac{\lg 1.6}{\lg 1.1}\approx 4.93\approx 5.$$

答：约 5 年内可以使总产量达到 30 万吨.

例 9 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 S_3，S_9，S_6 成等差数列，试求$\{a_n\}$的公比.

解 因为 S_3，S_9，S_6 成等差数列，

所以
$$S_3+S_6=2S_9.$$

若 $q=1$，则

$$S_3=3a_1,\ S_6=6a_1,\ S_9=9a_1.$$

由 $a_1\neq 0$ 可得

$$S_3+S_6\neq 2S_9,$$

与题设矛盾，故 $q\neq 1$.

由条件列式

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}.$$

整理后，得

$$q^3+q^6=2q^9.$$

因为 $q\neq 0$，

所以
$$1+q^3=2q^6.$$

将 q^3视为整体，解之得 $q^3=1$(舍去)或 $q^3=-\frac{1}{2}$，

即
$$q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

例 10 如图 1.3-4，一个小球从 10 m 高处自由落下，每次着地后又弹回到原来高度的$\frac{1}{3}$.

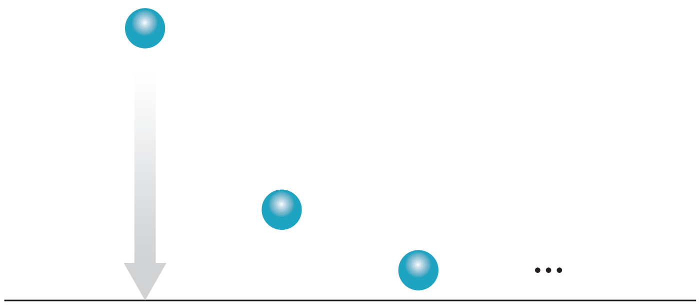


图 1.3-4

（1）小球第 10 次落地时，经过的路程是多少米？

（2）小球第几次落地时，经过的路程为$\frac{530}{27}$ m？

解 （1）设小球从第 $n-1$ 次落地到第 n 次落地时经过的路程为 a_n m，则

$$a_1=10，a_2=10\times\frac{1}{3}\times2，a_3=10\times\frac{1}{3^2}\times2，\cdots.$$

而且，当 $n\geqslant2$ 时，我们可以得到递推关系

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n，\ a_2=\frac{20}{3}.$$

这是一个首项为$\frac{20}{3}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

因此 $$a_n=a_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}=\frac{20}{3^{n-1}}(n\geqslant2)，且\ a_1=10.$$

所以小球第 10 次落地时，经过的路程为

$$\begin{aligned}S_{10}&=a_1+a_2+\cdots+a_{10}\\&=10+20\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^9\right]\\&=20-\frac{10}{3^9}(\text{m}).\end{aligned}$$

（2）设小球第 n 次落地时，经过的路程为$\frac{530}{27}$ m，

由于 $$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=10+20\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]\\&=20-\frac{10}{3^{n-1}},\end{aligned}$$

因此 $20-\frac{10}{3^{n-1}}=\frac{530}{27}$，解得 $n=4$.

所以当小球第 4 次落地时，经过的路程为$\frac{530}{27}$ m.

练 习

1. 求下列等比数列的前 n 项和：

（1）1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，…；　　（2）$a_1=\frac{1}{2}$，$q=-3$，$n=6$；

（3）$a_1=8$，$q=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{8}$.

2. 已知一个等比数列前 3 项的和为 1，前 6 项的和为 9，求该数列前 8 项的和.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 S_1，$2S_2$，$3S_3$ 成等差数列，试求 $\{a_n\}$ 的公比.

4. 一个热气球在第 1 分钟上升了 25 m 的高度，在以后的每一分钟里，它上升的高度都是它在前一分钟里上升高度的 80%. 这个热气球上升的高度能超过 125 m 吗？

习题 1.3

学而时习之

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

（1）若 $a_1=3$，$q=-2$，求 a_6；

（2）若 $a_3=20$，$a_6=160$，求 a_1 和 q；

（3）若 $a_5-a_1=15$，$a_4-a_2=6$，求 a_3.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，k 是小于 n 的正整数，a_n 是 a_{n-k} 和 a_{n+k} 的等比中项吗？

3.（1）在 2 和 9 之间插入两个数，使前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，试写出这个数列；

（2）在 320 与 5 中间插入 5 个数，使这 7 个数成等比数列，求这个等比数列.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

（1）若 $a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，求 $a_3+a_5+a_7$ 的值；

（2）若 $a_2+a_6+a_{10}=12$，$a_3+a_7+a_{11}=9$，求 $a_1+a_5+a_9$ 的值.

5. 小张买了一辆价值10万元的新车，根据市场行情，该款车每年按20%的速度折旧.

(1) 用一个式子表示 $n(n\in\mathbf{N}_+)$ 年后这辆车的价值；

(2) 如果他打算使用6年后卖掉这辆车，他大概能得多少钱？

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，那么数列 $\{a_n^2\}$，$\{a_{2n}\}$，$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 均是等比数列吗？为什么？

7. 在由正数组成的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4a_5a_6=3$，求 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_8+\log_3 a_9$ 的值.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，前 n 项和为 S_n.

(1) 如果 $S_6=\dfrac{189}{4}$，$q=\dfrac{1}{2}$，求 a_1；

(2) 如果 $S_3=14$，$a_1=2$，求 q；

(3) 如果 $S_5=15$，$S_{10}=60$，求 S_{15}.

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$S_6=4S_3$，求 S_n.

10. (中国古代数学问题)《张丘建算经》有如下问题：今有马行转迟，次日减半，疾七日，行七百里，问日行几何？意思是：现有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天走的里程是前一天的一半，连续行走7天，共走了700里，问这7天每天行走多少里？

温故而知新

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，其中 $a_m=n$，$a_n=m$，$m\neq n$，求 a_{m+n}.

12. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为19，公差为 -2 的等差数列，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 求通项 a_n 及 S_n；

(2) 设 $\{b_n-a_n\}$ 是首项为1，公比为3的等比数列，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 T_n.

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_4=-4$，令 $b_n=|a_n|$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

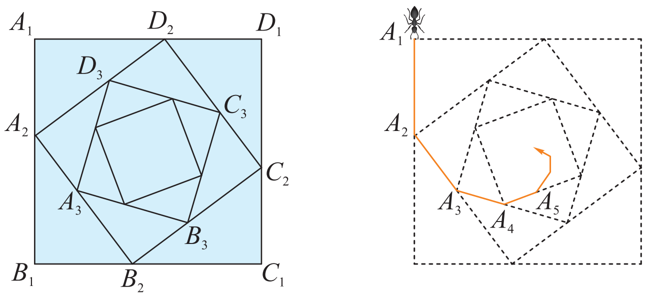
14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 求证：当公比 $q\neq-1$ 时，S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 成等比数列；

(2) 求证：S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等比数列；

(3) 试推广(1)和(2)的结果，写出你的结论并加以证明.

15. 如图(1)，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是一边长为 14 cm 的正方形．A_2，B_2，C_2，D_2 依次将 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1 分成 3∶4 的两部分，得到正方形 $A_2B_2C_2D_2$．依循相同的规律，A_3，B_3，C_3，D_3 依次将 A_2B_2，B_2C_2，C_2D_2，D_2A_2 分成 3∶4 的两部分，得到正方形 $A_3B_3C_3D_3$．不断重复这个步骤，得到正方形 $A_4B_4C_4D_4$，…，$A_nB_nC_nD_n$，….



(1)　　　　(2)

（第 15 题）

(1) 求 A_2B_2．

(2) 求 A_2A_3∶A_1A_2．

(3) 一蚂蚁从 A_1 出发，沿路径 $A_1A_2A_3\cdots A_n\cdots$ 爬行，如图(2)所示．证明：该蚂蚁所爬行的总距离不能大于 21 cm.

用计算机探究无穷递减等比数列的和

《庄子·天下》云："一尺之棰，日取其半，万世不竭．"这实际上是一个关于无穷递减等比数列$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$的问题，下面我们用计算机来展示这个数列的求和过程，体会这一无限逼近的思想．

一、利用 Excel 软件自动求和

打开 Excel 软件，在单元格 A1 中输入"项数 n"，在单元格 B1、C1 中分别输入数字"1""2"，同时选中单元格 B1、C1，并向右自动填充至 M1；在单元格 A2 中输入"1/2^n"，在单元格 B2 中输入公式"=1/2^B1"，并向右将公式自动填充至 M2；在单元格 A3 中输入"求和 S"，在单元格 B3 中输入公式"=B2"，在单元格 C3 中输入公式"=B3+C2"，拖动 C3 右下角的黑十字向右自动填充至 M3（如图 1 所示）．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	项数n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1/2^n	0.50000	0.25000	0.12500	0.06250	0.03125	0.01563	0.00781	0.00391	0.00195	0.00098	0.00049	0.00024
3	求和S	0.50000	0.75000	0.87500	0.93750	0.96875	0.98438	0.99219	0.99609	0.99805	0.99902	0.99951	0.99976

图 1

观察数据表中第三行数据 A3～M3 的变化趋势，你有什么发现？将表中三行数据继续向右填充，观察所得到的数据是否继续延续这个规律．

同时选中数据表第一行和第三行，点击菜单"插入→图表→散点图"（如图 2），S 随着项数 n 的变化而变化的规律就直观地呈现在图中．

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
项数n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/2^n	0.50000	0.25000	0.12500	0.06250	0.03125	0.01563	0.00781	0.00391	0.00195	0.00098	0.00049	0.00024
求和S	0.50000	0.75000	0.87500	0.93750	0.96875	0.98438	0.99219	0.99609	0.99805	0.99902	0.99951	0.99976

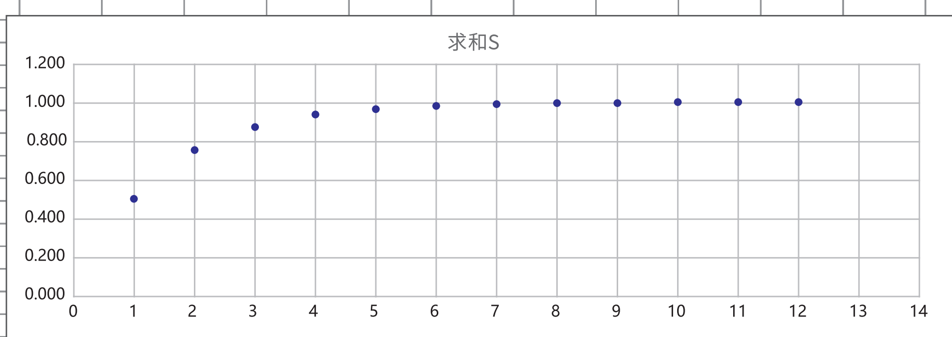


图 2

二、利用画板动态演示

访问网络画板，点击“开始作图”，按快捷键“Ctrl+Shift+P”调出变量设置菜单，设置变量 n(如图 3).

图 3

在绘图区绘制点 A 和点 B，选择 A，B 两点绘制出它们的中点 C，连接 AC，再选择点 A 和点 B，点击“迭代①”调出迭代设置菜单，按照图 4 设置迭代规则.

图 4

点击“确定”后，通过变量 n 下面的滑块调整 n 的值，观察图形的变化(如图 5)，你能从中体会到“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的意境吗?

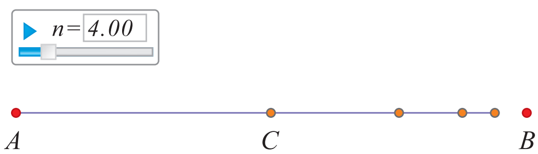


图 5

观察图 2 和图 5，你能发现等比数列 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 的和呈现什么规律吗？试归纳猜想并尝试证明.

① 迭代：重复执行一系列运算步骤，从前面的量依次求出后面的量的过程. 此过程的每一次结果，都是由对前一次所得结果施行相同的运算步骤得到的.

*1.4 数学归纳法

本章研究了大量与正整数 n 有关的数列问题．尝试解决下列问题：

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}$，试根据数列的递推关系写出它的通项公式．

我们可算得：

$$a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{2}{4},\ a_4=\frac{2}{5}.$$

通过对 $n=1$，2，3，4 进行归纳，可以猜想数列的通项公式是：$a_n=\frac{2}{n+1}$.

像这样由特殊到一般的推理方法，叫作归纳法．用归纳法可以帮助我们从一些具体事例中发现一般规律．当然，仅根据有限的特殊事例归纳得出的结论有时是不正确的．例如“n^2+n+11 是质数”这个命题对于 $n=1$，2，3，…，9 都成立，但当 $n=10$ 时，$10^2+10+11=121=11^2$，是一个合数．回到求数列$\{a_n\}$的通项公式问题，很自然地想到从 $n=5$ 开始，逐一往下穷举，但很显然，这个过程无穷无尽，根本无法实施．因而，我们希望寻找一种方法：通过有限步骤的推理，来证明 n 取所有正整数都成立．

如何找到这样一种推理方法呢？

大家熟悉的“多米诺骨牌效应”或许能给我们以启发．如图 1.4－1，将骨牌竖立起来摆成一排，并确保任意相邻的两块骨牌，若前一块骨牌倒下，则一定导致后一块骨牌也倒下．若推倒第一块骨牌，它会带倒第二块，再带倒第三块，以此类推，直到所有骨牌全部倒下．

图 1.4－1

如果把骨牌想象为一系列无穷多个编了号的命题 p_1，p_2，p_3，…，假定能够证明

（1）（奠基）最初的一个命题正确，

（2）（递推）由每一个命题的正确性都可以推出它的下一个命题的正确性，

那么便证明了这一系列命题的正确性．

第一步奠基，证明最初一个命题正确，相当于我们已经亲手“推倒第一块骨

* 本节为选学内容．

牌”，而第二步递推则意味着“每一块倒下的骨牌怎样将下一块骨牌带倒”．这样一来，无论有多少块骨牌，只要保证(1)和(2)成立，那么所有的骨牌一定都会倒下．

上述事例启发我们，在证明一个与正整数有关的命题时，可采用下面两个步骤：

(1) 证明 $n=n_0(n_0\in\mathbf{N}_+)$时命题成立；

(2) 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}_+,\ k\geqslant n_0)$时命题成立，证明 $n=k+1$ 时命题也成立．

只要完成这两个步骤，就可以知道：对任何从 n_0 开始的正整数 n，命题成立．这种证明方法叫作**数学归纳法**．

据此，我们来证明本节开头提出的数列的通项公式是 $a_n=\frac{2}{n+1}$这个猜想．

证明 (1) 当 $n=1$ 时，$a_n=1$ 显然成立．

(2) 假设当 $n=k$ 时，该公式成立，即 $a_k=\frac{2}{k+1}$，那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=\frac{2a_k}{2+a_k}=\frac{2\times\frac{2}{k+1}}{2+\frac{2}{k+1}}=\frac{2}{k+2}=\frac{2}{(k+1)+1}.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，公式也成立．

由(1)和(2)可以断定，对于任意的正整数 n，通项公式都成立．

先从少数的实例中摸索出规律来，再从理论上证明这一规律的一般性，这是人们认识客观法则的方法之一．

上述结论是容易理解的：由步骤(1)，可知通项公式对 $n=1$ 成立；由 $n=1$ 成立及步骤(2)，可知对 $n=1+1=2$ 也成立；再由 $n=2$ 成立及步骤(2)，可知对 $n=2+1=3$ 也成立．这样递推下去，可以知道当 $n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots$时通项公式都成立，即 $a_n=\frac{2}{n+1}$对任何 $n\in\mathbf{N}_+$都成立．

例 1 用数学归纳法证明：如果$\{a_n\}$是一个公差为 d 的等差数列，那么

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

对一切 $n\in\mathbf{N}_+$都成立．

证明 (1) 当 $n=1$ 时，左边$=a_1$，右边$=a_1+0\cdot d=a_1$，等式成立．

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=a_k+d=[a_1+(k-1)d]+d=a_1+[(k+1)-1]d.$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立．

由(1)和(2)可以断定，等式对一切 $n\in\mathbf{N}_+$都成立．

例 2 用数学归纳法证明：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ (n\in\mathbf{N}_+).$$

证明 （1）当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1$，右边 $=\frac{1\times2\times3}{6}=1$，等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\=&\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由（1）和（2）可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

我们用数学归纳法证明了前 n 个正整数的平方和公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

相对于证明，人们往往对等式右边的结论是如何想出来的感到为难.

下面我们来进行探索：

设 $S_1(n)=1+2+3+\cdots+n$，$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，可列表如下：

n	1	2	3	4	5	…	n
$S_1(n)$	1	3	6	10	15	…	$\frac{n(n+1)}{2}$
$S_2(n)$	1	5	14	30	55	…	?
$\frac{S_2(n)}{S_1(n)}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	…	$\frac{2n+1}{3}$

由表中数据，我们可以猜想：$S_2(n)=S_1(n)\cdot\frac{2n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

再看一个例子：前 n 个正整数的立方和表达式是怎样的？

设 $S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$，可列表如下：

n	1	2	3	4	…	n
$S_1(n)$	1	3	6	10	…	$\frac{n(n+1)}{2}$
$S_3(n)$	1	9	36	100	…	?

由表中数据，我们可以猜想：$S_3(n)=[S_1(n)]^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

一般来说，上述结论不是由数学归纳法发现出来的，而是通过观察具体实例“猜想”出来的，然后用数学归纳法来验证这个猜想.

作为练习，试用数学归纳法证明：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\ (n\in\mathbf{N}_+).$$

练 习

1. 用数学归纳法证明：
首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}$.

2. 已知数列 $\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，…，$\frac{1}{n(n+1)}$，…的前 n 项和为 S_n，计算 S_1，S_2，S_3，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法加以证明.

多知道一点

数学归纳法为什么正确？

为什么只要对一个与正整数有关的命题完成了如下两个步骤，命题就对所有的正整数 $n\geqslant n_0$ 成立？

(1) 证明 $n=n_0\,(n_0\in\mathbf{N}_+)$ 时命题成立；

(2) 假设 $n=k\,(k\in\mathbf{N}_+,\ k\geqslant n_0)$ 时命题成立，证明 $n=k+1$ 时命题成立.

证明 用反证法. 假设已经完成以上两个步骤，但命题仍对某些正整数 $n\geqslant n_0$ 不成立. 这些正整数 n 组成的集合 M 不是空集，其中必有最小数 $m\geqslant n_0$.

因为步骤(1)已经证明了命题对 n_0 成立，因此 $m>n_0$，$m-1\geqslant n_0$.

因为 m 是使命题不成立的最小正整数，那么当 $n=m-1$ 时，命题成立. 但步骤(2)证明了：只要 $n=m-1$ 时命题成立，那么 $n=(m-1)+1=m$ 时命题也成立，矛盾.

故假设不成立. 这就证明了数学归纳法的正确性.

习题 1.4

学而时习之

1. 用数学归纳法分别证明公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 与公比为 $q(q\neq1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

2. 已知数列 $\frac{1}{1\times4}$，$\frac{1}{4\times7}$，$\frac{1}{7\times10}$，…，$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$，…的前 n 项和为 S_n，计算 S_1，S_2，S_3，S_4. 根据计算结果，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法加以证明.

3. 用数学归纳法证明：

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2(n\in\mathbf{N}_+)$；

(2) $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

4. 用数学归纳法证明：凸 n 边形的内角和 $f(n)=(n-2)\cdot180°(n\geqslant3)$.

温故而知新

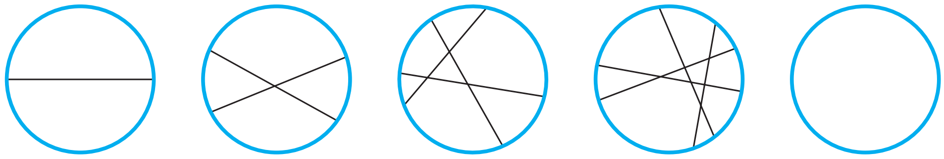
5. 用数学归纳法证明：

(1) $\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}(n\in\mathbf{N}_+)$；

(2) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}(n\in\mathbf{N}_+)$.

6. 用数学归纳法证明：$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\ (n\in\mathbf{N}_+)$.

7. （数学探究活动）如图，在圆内画 1 条弦，可将圆分割成两部分；画 2 条弦，彼此被分割成 4 条线段，可将圆分割成 4 部分；画 3 条弦，彼此被分割成 9 条线段，可将圆分割成 7 部分；画 4 条弦，彼此被分割成 16 条线段，可将圆分割成 11 部分.



① ② ③ ④ ⑤

（第 7 题）

（1）在圆内画 5 条弦时，它们彼此最多被分割成多少条线段？将圆最多分割成多少部分？

（2）猜想：圆内两两相交的 n 条弦，彼此最多被分割成多少条线段？

（3）猜想：圆内两两相交的 n 条弦，将圆最多分割成多少个部分？试用数学归纳法证明你所得到的结果.

8. 已知数列

$$\frac{8\times1}{1^2\times3^2},\ \frac{8\times2}{3^2\times5^2},\ \cdots,\ \frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\ \cdots,$$

S_n 为其前 n 项和，计算得

$$S_1=\frac{8}{9},\ S_2=\frac{24}{25},\ S_3=\frac{48}{49},\ S_4=\frac{80}{81}.$$

观察上述结果，猜想 S_n 的表达式，并用数学归纳法加以证明.

数学文化

中国古代数学中的数列

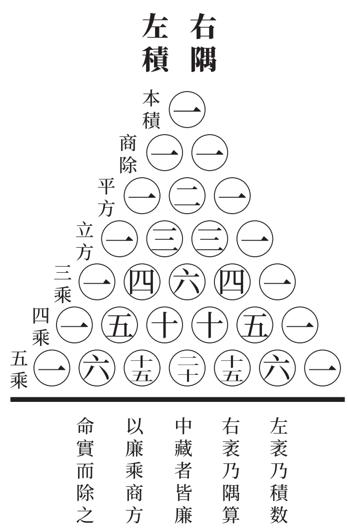
中国古代很早就有等差数列和等比数列的概念．西安半坡出土的陶器上，有排成等差数列的点阵花纹．长沙近郊出土的战国时期楚国的铜环权，其质量大致按等差或等比数列配置．《庄子·天下》中提到的“一尺之棰，日取其半”，就是一个无穷递减等比数列．

中国古代数学中最重要的著作是《九章算术》，成书于公元前 1 世纪之前．全书 246 个问题，涉及等差或等比数列的问题有 8 个，而且给出了等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 和求和公式 $S_n=\left[a_1+\frac{(n-1)d}{2}\right]n$．《九章算术》还讨论了开平方和开立方，指出可能有开不尽的情形．后来，魏晋时代的刘徽(3 世纪)在《九章算术注》中特别写了“开方术”注，论述了用十进小数任意逼近不尽根的算法，体现了用数列求近似解的思想．刘徽和稍后的祖冲之(429—500)、祖暅(5—6 世纪)父子，在圆周率和体积的计算方面取得杰出成就；他们的这些工作中也都用了数列逼近的思想和方法．不过他们都没有关注数列的构造和性质．

《九章算术》中的数列问题影响深远，后世一些算书中常有类似的等差等比的数列问题，如成书于公元 4—5 世纪的《孙子算经》《张丘建算经》，以及后来的《算法统宗》，等等．《张丘建算经》还给出了等差数列的另一个求和公式 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$．

在数列方面的创新性工作，应推北宋时期为高次开方法而提出的“贾宪三角”，以及稍后有关堆垛计算的高阶等差数列的研究．

贾宪(约 11 世纪上半叶)，北宋人，约公元 1050 年完成《黄帝九章算术细草》一书，可惜失传．所幸其主要内容被南宋数学家杨辉(约 13 世纪中)摘录于 1261 年所著的《详解九章算法》一书中．贾宪的高次开方法的基础是一张“开方作法本源”图，现称“贾宪三角”或“杨辉三角”．



开方作法本源

贾宪是怎样利用这个数表来做开高次方计算的呢？在杨辉的《详解九章算法》中有一道求 1 336 336 的 4 次方根的例题，大致是这样进行计算的：

第 1 步，将 1 336 336 去掉后 4 位得 133，由 $2^4=16<133<256=4^4$，估计得到初商在 2 与 4 之间，即为 3，设所求方根为 $30+x$，则 $1<x<10$.

第 2 步，$133-3^4=133-81=52$，按"开方作法本源"图第 5 行的 1—4—6—4—1，则应有

$$4\times30^3\times x+6\times30^2\times x^2+4\times30\times x^3+x^4=526\ 336.$$

即 $$108\ 000x+5\ 400x^2+120x^3+x^4=526\ 336.$$

由此估计得 $x<\dfrac{526\ 336}{108\ 000}\approx4.9$，故可设次商为 4.

第 3 步，设 $x=4+x_1$，代入前式得

$$108\ 000(4+x_1)+5\ 400(4+x_1)^2+120(4+x_1)^3+(4+x_1)^4=526\ 336.$$

计算此式左端常数项的方法是利用恒等式

$$108\ 000\times4+5\ 400\times4^2+120\times4^3+4^4=(108\ 000+(5\ 400+(120+4)\times4)\times4)\times4$$

边乘边加如下：

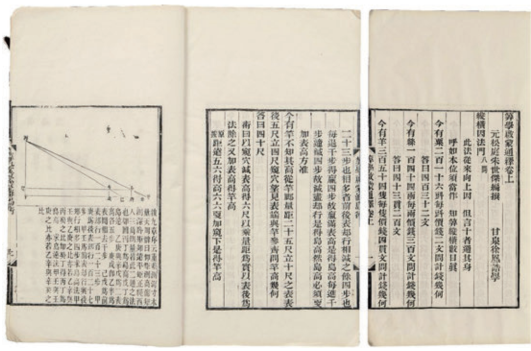
$$120+4=124,\ 5\ 400+124\times4=5\ 896,\ 10\ 800+5\ 896\times4=131\ 584,$$

最后 $131\ 584\times4=526\ 336$，和右端恰相等，表明 $x_1=0$. 这就获得了 1 336 336 的 4 次方根 34. 如果两端不等，则利用"开方作法本源"图数表算出其余的 4 个系数，估计下一位的商，如此继续. 这是一个有效的高度机械化的算法，与现代通用的"霍纳算法"(1819)基本一致！

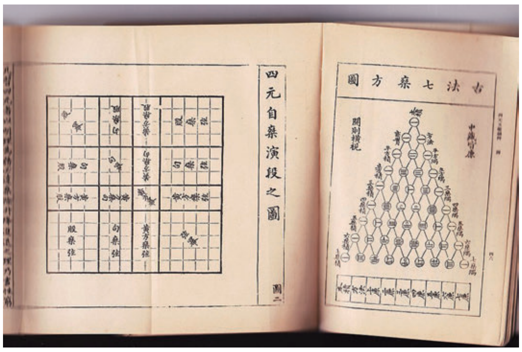
等差数列的特点是每一项与前一项之差相等. 如果数列$\{a_n\}$不是等差数列，但每一项与前一项之差构成等差数列，即$\{a_n-a_{n-1}\}$是等差数列，则$\{a_n\}$叫作二阶等差数列. 类似地，若$\{a_n-a_{n-1}\}$是二阶等差数列，则$\{a_n\}$叫作三阶等差数列. 如此可以对更大的整数 m 归纳地定义 m 阶等差数列. 例如，容易验证数列 1，4，9，16，…，n^2，…是二阶等差数列，而 1，8，27，64，…，n^3，…是三阶等差数列.

高阶等差数列的研究，在中国始于北宋的沈括(1031—1095). 他的名著《梦溪笔谈》卷十八"隙积术"，给出了长方台形垛积的求和公式，但没有说明道理. 杨辉在《详解九章算法》中明确地推得一些高阶等差数列求和公式. 而在这方面获得最系统最普遍结果的，当推元代数学家朱世杰.

朱世杰(1249—1314)，字汉卿，自号松庭. 他的代表性著作是《算学启蒙》(1299)和《四元玉鉴》(1303).《算学启蒙》是一部通俗数学名著，曾流传海外，促进了日本与朝鲜数学的发展.《四元玉鉴》书名中的"四元"指 4 个未知数天元、地元、人元和物元，而"玉鉴"指玉石打磨的镜子，书名寓意是要亮出多元方程求解的奥秘. 其中最突出的创造为"四元术"(求解多元高次代数方程组的消元法)、"招差术"(高次内插法)和"垛积术"，后者即高阶等差数列的求和法. 三者之中，垛积术提供了一些更基本的计算方法.



《算学启蒙》书影



《四元玉鉴》书影

朱世杰在《四元玉鉴》中给出了一系列的垛积公式，也就是高阶等差数列求和公式．最基本最简单的叫作“茭草垛”，就是熟知的等差数列求和公式．在“茭草垛”基础上推出了“三角垛”公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)}{2}=1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

这是一个二阶等差数列求和公式．进一步的“撒星形垛”公式为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)}{6}=1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24},$$

这是一个三阶等差数列求和公式．

朱世杰这样相继推导，获得了一类 p 阶等差数列的求和公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)(r+2)\cdot\cdots\cdot(r+p-1)}{p!}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+p)}{(p+1)!}.$$

从这套容易记忆的公式出发，容易推出平方和、立方和以至任意方幂和的计算公式，从而解决了任意高阶等差数列的求和问题．在《四元玉鉴》和《算学启蒙》中，还有更多有趣的堆垛问题和公式．

朱世杰还指出了三角垛公式和贾宪三角以及招差术的关系．这些工作当时在世界上处于领先地位，也达到了中国古代数学的顶峰．此后中国传统数学就逐渐衰退了．其原因值得我们进一步思考和探索．

数学文化

从兔子问题引出的斐波那契数列


斐波那契

公元 1202 年，意大利数学家斐波那契(约 1170—约 1240)在《算盘全书》中提出了一个有趣的兔子繁殖问题：“假定一对刚出生的小兔子一个月后能长成大兔子，再过一个月后就能生出一对小兔子，并且以后每个月都生一对小兔子．设所生小兔子都是一雌一雄，均无死亡．问一对刚出生的兔子一年后可繁殖多少对兔子？”

我们借助图形来直观呈现兔子繁殖问题前几个月的情况(如图 1)：

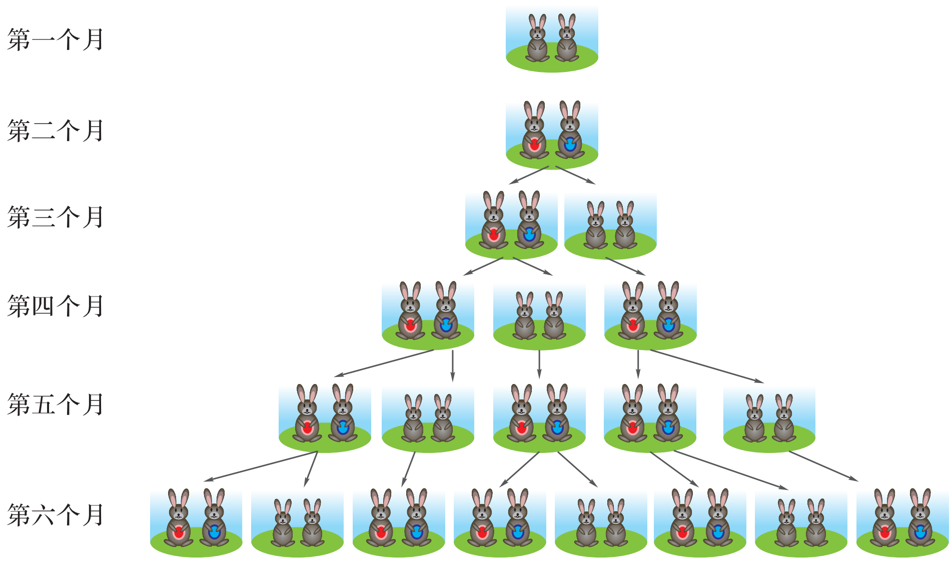


图 1

记第 n 个月的兔子对数为 F_n，则

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ \cdots,\ F_{12}=144.$$

这说明，一年过后，一对兔子会变成 144 对兔子．我们用数字将数列 $\{F_n\}$ 排列出来：

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots,$$

就得到了著名的斐波那契数列．

观察上述数列，我们不难发现：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 3).$$

这是一个由递推关系给出的数列，这也意味着要求 F_n，需先求 F_{n-1} 和 F_{n-2}(如图 2)．

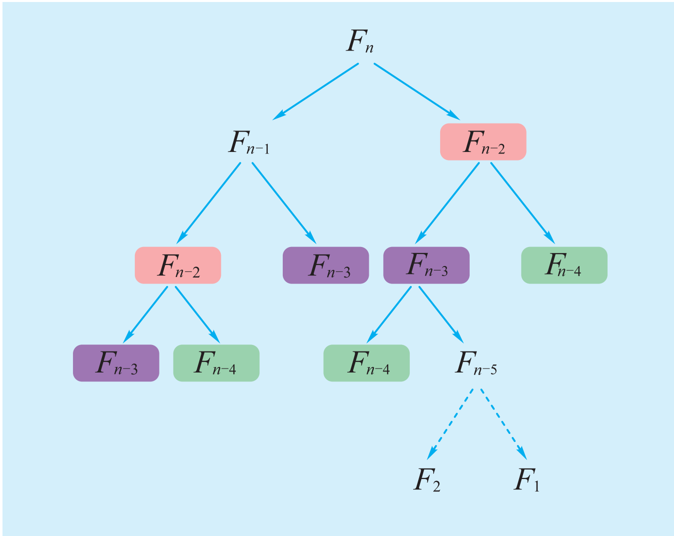


图 2

为了更直接计算，人们还找到了通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

通项公式居然是用无理数来表达的，但它确实是一个自然数的数列，而且当 n 无限增大时，$\frac{F_{n-1}}{F_n}$越来越逼近黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（≈ 0.618），因此人们又称这个数列为黄金数列.

人们在研究中发现，斐波那契数列不仅与许多数学问题有密切的联系，还与自然界中许多现象有惊人的巧合．例如，树苗在第一年长出一条新枝，新枝成长一年后变为老枝，老枝每年都长出一条新枝．每一条树枝都按照这个规律成长，则每年的分枝数正好构成斐波那契数列（如图 3）.

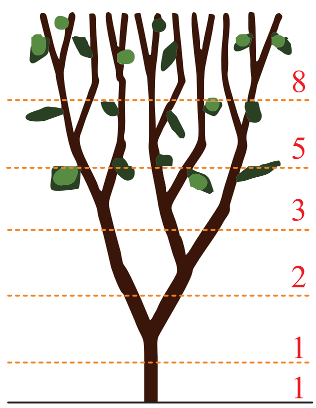


图 3

1963 年，一群热衷研究“兔子问题”的数学家成立了国际性的斐波那契协会，并着手在美国出版《斐波那契季刊》，专门刊登与斐波那契数列有关的数学论文．时至今日，人们对黄金数列的研究热情仍然不减.

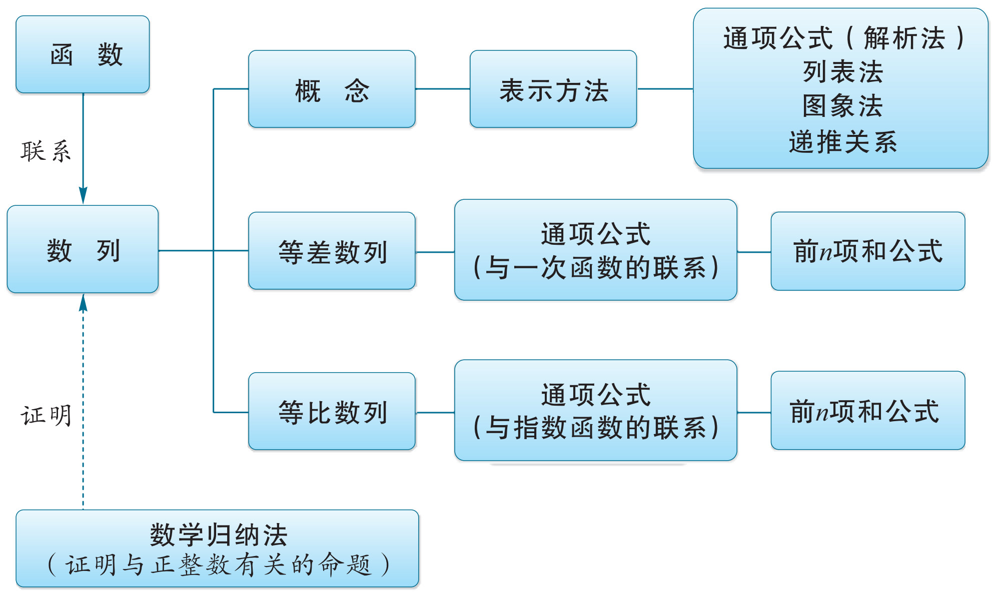
关于斐波那契数列，有很多恒等式，其中一个是

$$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1},$$

这个等式很漂亮，你能尝试推导它吗？

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1．数列在现实世界中广泛存在．从函数的观点看，数列可以看成定义在正整数集 $\mathbf{N}_+$ 或它的有限子集$\{1, 2, \cdots, n\}$上的函数 $a_n=f(n)$，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一列函数值．数列有哪些表示方法？

2．本章学习了两类特殊的数列——等差数列与等比数列．试结合一些实际问题的数量关系，抽象出等差数列与等比数列，并推导这些数列的通项公式．从函数的观点看等差数列与等比数列的通项公式，能反映什么函数关系？这些数列的图象各有什么特点？

3．你能推导等差数列与等比数列的前 n 项和公式吗？这些求和公式分别有哪些结构特征？

4．数列是解决许多实际问题的重要数学模型，试结合一些问题情境建立数列模型并求解．对于某些具体的数列建模问题，关键是根据条件列出递推公式，试与同伴探讨求数列递推公式的思考路径．

*5．数学归纳法是一种证明与正整数 n 有关的数学命题的重要方法．数学归纳法的原理是什么？如何用数学归纳法证明命题？试与同伴总结使用数学归纳法证明命题的经验．

复习题一

学而时习之

1. 写出下面数列的一个通项公式：

(1) $\frac{3}{2}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{9}{16}$，$\frac{11}{32}$，…；

(2) 1，$-\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$-\sqrt[4]{4}$，$\sqrt[5]{5}$，…；

(3) 6，66，666，6 666，66 666，…；

(4) 2，0，2，0，2，….

2. 若数列$\{a_n\}$中各项均不为零，则有 $a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_n$ 成立．试根据这一结论求解：

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}(n\geqslant 2)$，求通项公式 a_n.

3. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n(n+1)}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2-10n+10$.

(1) 数列$\{a_n\}$从第几项起各项的数值逐渐增大？

(2) 数列$\{a_n\}$的哪些项为正数？

(3) 数列中是否存在数值与首项相同的项？

5. 在 a 和 $b(a\neq b)$两数之间插入 n 个数，使它们与 a，b 组成等差数列$\{a_n\}$，求该数列的公差.

6. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3a_7=-16$，$a_4+a_6=0$，求$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的前四项之和为 60，末四项之和为 180，所有项的和为 390，求此数列的项数 n.

8. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_7=7$，$S_{15}=75$，求$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

9. (1) 对于正数 a，b，我们把$\frac{a+b}{2}$称为 a，b 的算术平均数，那么 a，$\frac{a+b}{2}$，b 成等差数列吗？

(2) 对于正数 a，b，我们把 $\sqrt{ab}$称为 a，b 的几何平均数，那么 a，$\sqrt{ab}$，b 成等比数列吗？

10. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 S_{n+1}，S_n，S_{n+2}成等差数列，求公比 q.

11. 若 $2^a=3$，$2^b=6$，$2^c=12$，则 a，b，c 是等差数列还是等比数列？

12. 某城市 2007 年底人口为 500 万，人均住房面积为 14.5 m^2，到 2017 年底该市的人均住房面积翻了一番．假定该市人口的年平均增长率为 1%，求这 10 年中该市每年新增住房的平均面积(精确到 10^4 m^2).

13．（中国古代数学问题）

（1）《九章算术》中有如下问题：今有良马与驽马发长安至齐，齐去长安三千里．良马初日行一百九十三里，日增十三里；驽马初日行九十七里，日减半里．良马先至齐，复还迎驽马．问几何日相逢？

（2）远望巍巍塔七层，红灯向下成倍增，共灯三百八十一，请问塔顶几盏灯？

14．求数列 $2+\frac{1}{3}$，$4+\frac{1}{9}$，$6+\frac{1}{27}$，…，$2n+\frac{1}{3^n}$，…的前 n 项和 S_n．

*15．用数学归纳法证明以下恒等式（$n\in\mathbf{N}_+$）：

（1）$-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$；

（2）$(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)$．

温故而知新

16．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_na_{n-1}=a_{n-1}-a_n(n\geqslant2)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

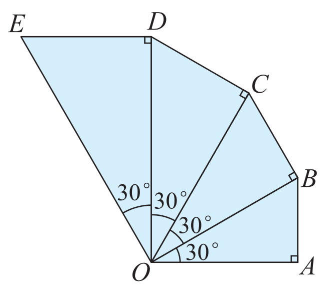
17．若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=13$，$d=-4$，记 $S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，求 S_n．

18．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $2a_1+3a_2=1$，$a_3^2=9a_2a_6$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_n$，求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和．

19．如图，由 Rt△OAB 开始，作一系列的相似三角形，OA 的长度是 1 cm.



（第 19 题）

（1）求 OB，OC 和 OD.

（2）设 $OB=l_1$，$OC=l_2$，$OD=l_3$，如此类推，证明：$l_n=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

（3）用这个方法作更多的直角三角形，直至最后一个三角形的斜边 OM 与 OA 重合为止，求 OM.

20．某地决定投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业，且打算本年度投入 800 万元，以后每年的投入将比上一年度减少 $\frac{1}{5}$．本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业具有促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上一年增加 $\frac{1}{4}$.

（1）设 n 年内（本年度为第一年）总投入为 a_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元，写出 a_n，b_n 的表达式；

（2）至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

21. 从盛满 a L（$a>1$）纯酒精的容器里倒出 1 L，然后添满水摇匀（假设水和酒精混合后体积不变），再倒出 1 L 混合溶液后又用水添满摇匀，如此继续下去，问第 n 次操作后溶液的浓度是多少？若 $a=2$ 时，至少应倒几次后才能使酒精的浓度低于 10%？

上下而求索

22. 斐波那契数列$\{F_n\}$满足条件：

$$F_1=F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$

按如下步骤将$\{F_n\}$分解为两个等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$之和，最后可以得出$\{F_n\}$的通项公式：

（1）若等比数列$\{a_n\}$满足条件 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，求$\{a_n\}$的公比 q.

（2）若等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$同时满足条件 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$，且 $a_1+b_1=a_2+b_2=1$，求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

（3）设 $F_n=a_n+b_n$，试写出斐波那契数列$\{F_n\}$的通项公式.

23. （数学探究活动）国家助学贷款由国家指定的商业银行面向在校全日制高等学校经济困难的学生发放，用于帮助他们支付在校期间的学习和日常生活费.

如果一名入校新生计划采用国家助学贷款的方式 4 年内每年贷款 6 000 元. 请收集有关资料，解决以下问题：

（1）毕业前还清，求还款总额.

（2）如果该生在毕业后的第 6 年还清贷款，对于等额本金法和等额本息法两种还款形式，求在下列条件下各还款多少元.

①毕业后即开始偿还本息；

②宽限期结束后开始偿还本息；

③该生毕业后的第 5 年希望提前将剩余的欠款还清.

乐音频率与等比数列

一 问题的提出

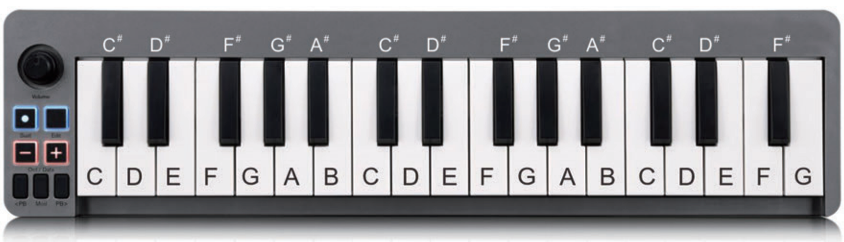
音乐由高低不同的声音组成．声音的高低由频率（每秒钟振动的次数）决定．很自然地问：1(do)，2(re)，3(mi)，4(fa)，5(sol)，6(la)，7(si)，$\dot{1}$(do)的频率是多少？

1(do)的频率并不固定，在不同调中各不相同．要这样提问才确切：

固定了1(do)的频率之后，怎样计算其余各音的频率？

二 实验与观察

观察电子琴（或钢琴、风琴）的键盘，如图所示．



实验　从左到右依次弹每个键（包括白键和黑键），听它们发的音，是不是依次升高？你感觉相邻两音的升高幅度是不是都相同？

图中各个白键下方以及黑键上方分别标出了各键的名称．按从左到右依次排列为

C，C$^{\#}$，D，D$^{\#}$，E，F，F$^{\#}$，G，G$^{\#}$，A，A$^{\#}$，B，C，C$^{\#}$，D，…

上述各键从左到右相邻键发音的升高幅度称为半音，每个半音升高幅度相同．其中C，D，E，F，G，A，B是从C开始连续7个白键，C$^{\#}$，D$^{\#}$，F$^{\#}$，G$^{\#}$，A$^{\#}$是白键C，D，F，G，A右侧相邻的黑键，符号#表示发音比左边的白键升高半音．各键名称以C到B共12个键为一个周期不断循环，后一个周期各键发音比前一周期相应各键发音升高八度．

每个键的发音都可以作为1(do)．如果歌曲简谱标“1=C”，就是以C键发音

为 1(do)，称为 C 调．从 C 开始往右到下一个 C 的 8 个白键发音依次是 C 调的

$$1(\text{do})\to 2(\text{re})\to 3(\text{mi}),\ 4(\text{fa})\to 5(\text{sol})\to 6(\text{la})\to 7(\text{si}),\ \dot{1}(\text{do})$$

其中的箭头→表示这两个白键之间跳过了一个黑键，升高了两个半音，称为全音．除了 3，4 之间，7，$\dot{1}$ 之间没有黑键，只升高一个半音，其余间隔白键都是升高全音．

三 模型的假设

（1）人的听觉对声音差别感受到的不是两音的频率差，而是频率比．每个半音升高幅度相同，频率乘相同倍数 q．

（2）高八度 $\dot{1}$ 的频率是 1 的 2 倍．

四 模型的求解——十二平均律

键盘上，从 C 键往右到下一个 C 键共 13 个键：C，C$^\#$，D，D$^\#$，E，F，F$^\#$，G，G$^\#$，A，A$^\#$，B，C．它们的频率 a_1，a_2，…，a_{13} 成等比数列，公比为 q．记其中第一个 C 发音 1 的频率 $a_1=f$，则下一个 C 发音 $\dot{1}$ 的频率 $a_{13}=2f$．由 $a_{13}=a_1q^{12}$，即 $2f=q^{12}f$，得 $q^{12}=2$，$q=\sqrt[12]{2}\approx 1.059\,463$．

C 调各音 1→2→3，4→5→6→7，$\dot{1}$ 由 8 个白键 C→D→E，F→G→A→B，C 发出．其中的箭头→表示两个白键之间跳过了一个黑键，频率乘 q^2，而逗号表示的间隔 3，4 与 7，$\dot{1}$ 升高半音，频率乘 q．因此，1，2，3，4，5，6，7，$\dot{1}$ 的频率依次是

$$f,\ 2^{\frac{2}{12}}f,\ 2^{\frac{4}{12}}f,\ 2^{\frac{5}{12}}f,\ 2^{\frac{7}{12}}f,\ 2^{\frac{9}{12}}f,\ 2^{\frac{11}{12}}f,\ 2f.$$

这样得到的音乐体系称为**十二平均律**．意思是将 $\dot{1}$(do)与 1(do)的频率比用等比数列平均分成了 12 份．

五 模型的检验——计算机模拟

很多计算机软件都有 SOUND 语句，输入频率和时间长度就发出一个音．例如，在 BASIC 中运行语句“SOUND 440，4”，就发出频率为 440 Hz，时间长度为 4 s 的音．

利用这个语句可以编写程序，将不同频率和时间长度的音组成乐曲，用计算机播放出来．同学们可在 BASIC 软件中动手编写一首乐曲的程序，并试听效果．

六 进一步讨论——五度相生

前面提到用等比数列将 $2f$ 与 f 的频率比分成若干等份，为什么要分成 12 等份，而不是分成别的 n 等份？

音乐由不同频率的音组成，不同频率的音还应该相互和谐．怎样才和谐？频率之比是简单分数，分子分母越小越和谐．而最简单的分数比是 $\frac{2}{1}$，其次是 $\frac{3}{2}$.

频率比为 $\frac{2}{1}$ 的两个音相差八度，比如 1(do)的频率是 f，$2f$ 就是 $\dot{1}$．两个人合唱同一首歌，音高相差八度，听起来仍然和谐．将相差八度的 1 与 $\dot{1}$ 用同一个数字 1 表示，音乐用同一个唱名 do，都是将相差八度的音看成同一个音.

从一个基础音 1 的频率 f 开始，将频率乘 $\frac{3}{2}$ 产生一个升高五度的新的音．重复这个过程，不断升高五度，叫作**五度相生**．得到的各个音的频率组成一个公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列．为了辨认其中有多少新的音，将频率超过 $2f$ 的音降若干个八度变成中音，频率变到区间 $[f,\ 2f)$ 中，如下所示：

$$f,\ \frac{3}{2}f=1.5f,\ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 f}{2}=1.125f,\ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 f}{2}=1.687\,5f,\ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 f}{2^2}\approx1.266f,$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 f}{2^2}\approx1.898f.$$

频率 $\frac{3^5}{2^7}f\approx1.898f\approx2f$，这个音接近 $\dot{1}$，不作为新的音．前 5 个频率是不同的音．以 f 为简谱的 1(do)，这五个音就是 1，5，2，6，3，从低到高排序为 1，2，3，5，6，中国古代叫作宫，商，角，徵，羽．以这 5 个音为基础产生音乐，称为**五声音阶**，从春秋时代至今用了两千多年，还留下一个成语叫五音不全．现在中国很多民间歌曲没有 4(fa)，7(si)，仍是五声音阶.

后来感觉 $1.898f$ 与 $2f$ 还不够接近，将它作为一个新的音，就是简谱的 7(si)．还将等比数列 f，$\frac{3}{2}f$，…往左延伸一项 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}f=\frac{2}{3}f$，再升高八度变成中音频率 $\frac{4}{3}f$，就是简谱的 4(fa)．五度相生的过程继续进行下去，直到得到 $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}f\div2^7=\frac{3^{12}}{2^{19}}f\approx1.014f$，非常接近 f，从而得到 12 个不同的音组成音阶.

思考：

问题研究一：五度相生产生多少个不同的音

五度相生建立音阶体系时，基础音 1(do)的频率 f 乘 $\frac{3}{2}$ 得到 $\frac{3}{2}f$，产生一个升高五度的新的音．重复这个过程，不断乘 $\frac{3}{2}$ 得到的各个音的频率组成一个公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列，如下所示：

$$f,\ \frac{3}{2}f,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 f,\ \left(\frac{3}{2}\right)^3 f,\ \cdots,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} f,\ \left(\frac{3}{2}\right)^n f,\ \cdots$$

如果该等比数列中的某一项 $\left(\frac{3}{2}\right)^n f$ 接近 $2^k\cdot f$（其中 k 为正整数），则这个音与 1(do)相差 k 个八度，不是新的音．其他各音的频率与 $2^k\cdot f$ 有较明显的差别，这样听觉上可以用耳朵分辨，就可看成新的音．

为了判定能产生多少个不同的新的音，实际上就是提出一个数学问题：

当正整数 n，k 分别取什么值时，有 $\left(\frac{3}{2}\right)^n\approx 2^k$，即 $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^k}=\dfrac{3^n}{2^{n+k}}\approx 1$？

请同学们思考上述问题，并与同伴进行交流，最后作出结论．

问题研究二：分数近似值

音乐中两个音频率之比是简单分数才和谐．而十二平均律各音频率组成的等比数列的公比 $q=\sqrt[12]{2}$ 是无理数，2(re)，3(mi)，4(fa)，5(sol)，6(la)，7(si)各音与 1(do)的频率比都是无理数，不可能和谐．怎么办？

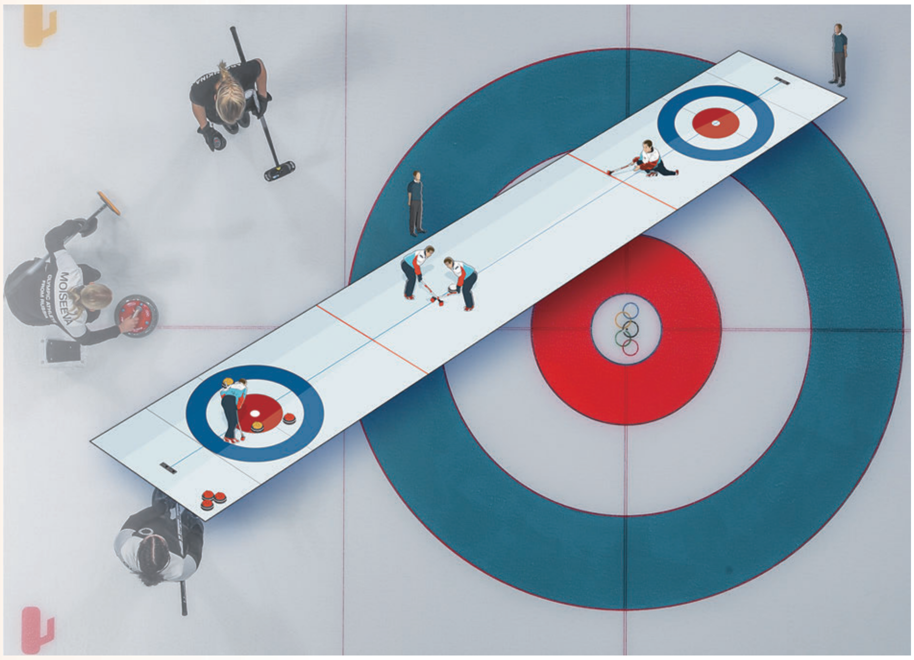
钢琴调音师调准各个琴键发音时并不用仪器测频率，而是根据听觉来判断音的高低．为了使各音听起来更好听、更和谐，并不把各音之间的差距调得完全相等，而是从十二平均律偏离一点．也就是将频率比变成简单分数，导致一点误差，但让误差尽量小．

在“模型的求解——十二平均律”中，已得出 2，3，4，5，6，7 各音与 1 的频率比分别为 q^2，q^4，q^5，q^7，q^9，q^{11}，其中 $q=\sqrt[12]{2}=1.059\,463\cdots$，可以算出各音与 1 的频率比的小数近似值（只取到小数点后第 5 位）．再把小数近似值写成与之最接近的简单分数，要求分数的分母不超过 8，误差尽量小．请同学们借助计算机（或计算器）完成下面的表格．

频率比	q^2	q^4	q^5	q^7	q^9	q^{11}
分数指数幂	$2^{\frac{2}{12}}$					
小数近似值	1.122 46					
分数近似值	$\frac{9}{8}$					

第2章

2 平面解析几何初步



解析几何是 17 世纪数学发展的重大成果之一，它是用代数方法来研究几何图形性质的一门学科．通过建立坐标系，把几何图形的最基本元素——点和曲线分别用坐标和方程来描述，把几何问题转化成数和方程的问题，用代数运算求解，再将所得到的结论翻译成几何的语言．

本章，我们以熟悉的几何图形——直线和圆为研究对象，在平面直角坐标系中建立直线和圆的代数方程，通过对方程的讨论，研究它们的几何性质及其相互的位置关系，体会数形结合的思想，初步形成用代数方法解决几何问题的能力．

2.1 直线的斜率

在平面直角坐标系中，点用坐标表示，直线则应该用直线上所有点的坐标共同满足的关系来表示．为了用代数方法研究直线的几何性质，本节首先探索确定直线位置的几何要素，然后用代数语言把这些几何要素表示出来．

我们知道，在平面上两点确定一条直线，一个已知点却不能确定一条直线．如图 2.1－1，过已知点 P 可以画无数条直线．这些直线的区别在哪里呢？

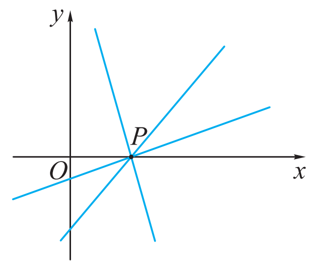


图 2.1－1

容易发现，这些直线的方向不同，也就是倾斜程度不同．只要能想出办法刻画直线的倾斜程度，就可以用倾斜程度来刻画直线的方向．

建立平面直角坐标系时，把 x 轴摆放在水平方向上，直线 l 偏离 x 轴所成的角 α 就可以刻画直线的倾斜程度．

当直线 l 与 x 轴相交时，我们把 x 轴正向绕交点逆时针旋转到与直线 l 向上方向首次重合所成的角 α 叫作直线 l 的**倾斜角**．如图 2.1－2(1)，直线 l 的倾斜角是锐角；如图 2.1－2(2)，直线 l 的倾斜角是钝角．当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定倾斜角 $\alpha=0$．因此，倾斜角的取值范围是 $0\leqslant\alpha<\pi$．

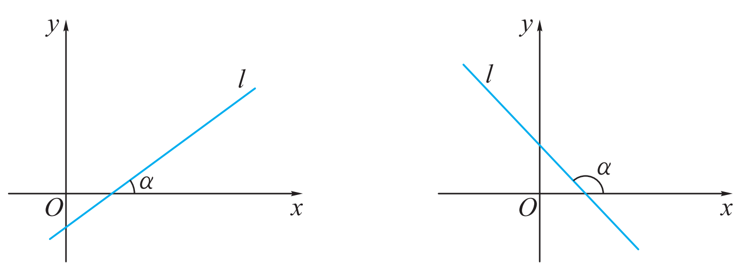


图 2.1－2

平面直角坐标系内的每一条直线都有一个确定的倾斜角 α，而且倾斜程度相同的直线，其倾斜角相等，倾斜程度不同的直线，其倾斜角不相等．因此，我们可以用倾斜角 α 表示平面直角坐标系内一条直线的倾斜程度，以刻画直线的方向，再结合直线上的一个定点，就可以唯一确定这条直线了．

在实际生活中，我们经常用“坡度”来描述一段道路相对于水平方向的倾斜程度.

例如，在图 2.1－3 中，沿着这条道路从 A 点前进到 B 点，设在水平方向向右前进的距离为 AD，竖直方向上升的高度为 DB(如果是下降，则 DB 的值为负实数)，则

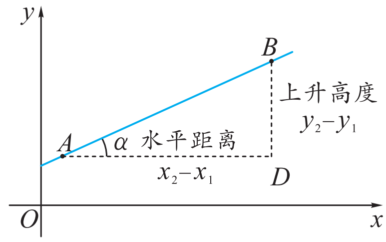


图 2.1－3

$$坡度\ k=\frac{上升高度}{水平距离}=\frac{DB}{AD}.$$

坡度 $k>0$ 表示这段道路是上坡，$k=0$ 表示是平路，$k<0$ 表示是下坡，$|k|$ 越大说明坡越陡.

容易发现，这里的坡度就是倾斜角 $\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$的正切.

一条直线的倾斜角$\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$的正切值 k 称为这条直线的**斜率**，即 $k=\tan\alpha$.

例如，当直线的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，斜率 $k=\tan\frac{\pi}{4}=1$；

当直线的倾斜角 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$时，斜率 $k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$.

通过斜率研究直线的倾斜程度，这是数形结合的生动体现.

倾斜角是$\frac{\pi}{2}$的直线没有斜率. 倾斜角 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$的直线都有斜率. 倾斜角不同，直线的斜率也不同. 因此，可以用斜率来表示直线的倾斜程度.

下面，我们来探索如何由直线上两点的坐标计算直线的斜率.

设直线 l 不垂直于 x 轴. 已知直线 l 上任意两个不同点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，求直线 l 的斜率.

设直线 l 的倾斜角为 α. 如图 2.1－4，从原点 O 出发作有向线段 OP 表示向量 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$，则 OP 与直线 l 平行或位于直线 l 上，有相同的倾斜角，即 $\angle xOP=\alpha$.

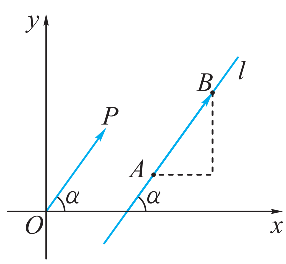


图 2.1－4

由$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$得

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

上式即为经过两个不同点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)(x_1\neq x_2)$的直线的**斜率公式**.

例 1 如图 2.1－5，已知三点 $A(2，1)$，$B(5，2)$，$C(4，3)$.

(1) 求直线 AB，BC，CA 的斜率；

(2) 求直线 BC，CA 的倾斜角.

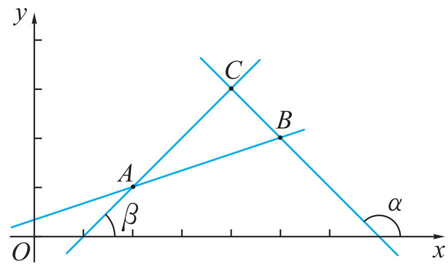


图 2.1－5

解 (1) 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$；

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{3-2}{4-5}=-1$；

直线 CA 的斜率 $k_{CA}=\frac{1-3}{2-4}=1$.

(2) 设直线 BC 的倾斜角为 α.

由 $\tan\alpha=k_{BC}=-1$，可知倾斜角 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

设直线 CA 的倾斜角为 β.

由 $\tan\beta=k_{CA}=1$，可知倾斜角 $\beta=\frac{\pi}{4}$.

你能判断出$\triangle ABC$是什么形状的三角形吗？

例 2 在平面直角坐标系中，画出经过点 $A(2，0)$，且斜率分别为 2 与 -2 的直线 l_1，l_2.

分析 要画出过点 $A(2，0)$且斜率为 2(或-2)的直线，只需再确定直线上异于点 A 的另一个点的位置(即坐标).

解 设直线 l_1 上另一点 B 的坐标为$(x_1，y_1)$，根据斜率公式有

$$2=\frac{y_1-0}{x_1-2},$$

即 $y_1=2(x_1-2)$. 不妨取 $x_1=0$，则 $y_1=-4$，于是得点 B 的坐标为$(0，-4)$. 过点 $A(2，0)$及点 $B(0，-4)$作直线即为 l_1，如图 2.1－6.

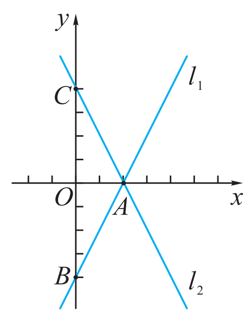


图 2.1－6

同样地，设直线 l_2 上另一点 C 的坐标为$(x_2，y_2)$，根据斜率公式有

$$-2=\frac{y_2-0}{x_2-2},$$

即 $y_2=-2(x_2-2)$. 取 $x_2=0$，则$y_2=4$，于是得点 C 的坐标为$(0，4)$. 过点 $A(2，0)$及点$C(0，4)$作直线即为 l_2，如图 2.1－6.

例 3 设一次函数 $y=kx+b$ 的图象为直线 l，求 l 的斜率.

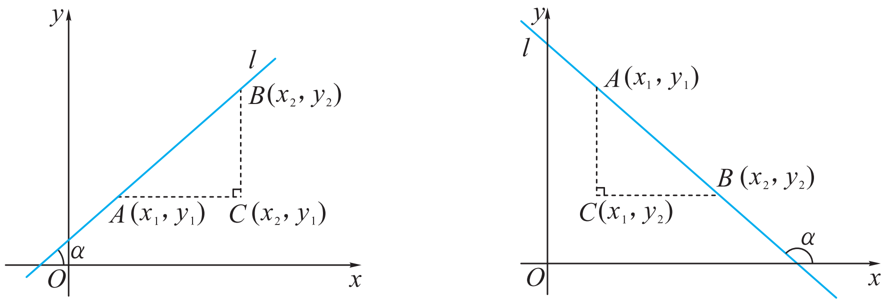
解 任取 $x_1\neq x_2$，则 $A(x_1，kx_1+b)$，$B(x_2，kx_2+b)$是直线 l 上两个不同的点. 由直线斜率公式可知，l 的斜率为

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(kx_2+b)-(kx_1+b)}{x_2-x_1}=k.$$

如图 2.1－7，对照一次函数 $y=kx+b$ 的图象，可以得到：

当斜率 $k>0$，倾斜角 α 是锐角，直线从左到右上升，因变量增量 y_2-y_1 与自变量增量 x_2-x_1 同号，一次函数是增函数.

当斜率 $k<0$，倾斜角 α 是钝角，直线从左到右下降，因变量增量 y_2-y_1 与自变量增量 x_2-x_1 异号，一次函数是减函数.



（$k>0$）　　　　（$k<0$）

图 2.1－7

练习

1. 已知直线的倾斜角，求直线的斜率：

（1）$\frac{\pi}{3}$；　（2）$\frac{2\pi}{3}$；　（3）$\frac{5\pi}{6}$.

2. 已知直线上两点，求直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角：

（1）$A(3, 5)$，$B(-1, -2)$；　（2）$C(-3, 5)$，$D(3, -1)$.

3. 在平面直角坐标系中，画出经过点(1，2)，且斜率分别为 3 与 -3 的直线.

习题 2.1

学而时习之

1. 求经过下列两点的直线的斜率、倾斜角：

（1）(1，0)，$(4, \sqrt{3})$；　（2）$(-3, 4)$，$(-2, 5)$；

（3）$(1, -2)$，$(5, -2)$；　（4）(3，0)，(3，6).

2. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(2, 3)$，$B(1, -1)$，$C(-1, -2)$，求

$\triangle ABC$ 的三条边所在直线的斜率.

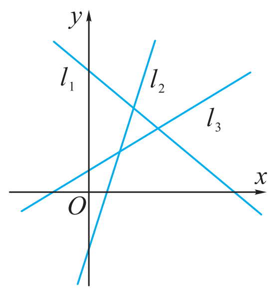
3. 在平面直角坐标系中，画出经过点 $A(0, -2)$，且斜率分别为 1，-1，2 与 -3 的直线 l_1，l_2，l_3，l_4.

4. 求经过下列两点的直线所表示的一次函数的解析式，并判断其倾斜角是锐角还是钝角：

(1) $(18, 8)$，$(4, -4)$； (2) $(0, 0)$，$(-1, \sqrt{3})$.

温故而知新

5. 如图，已知直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，试判断三条直线斜率的大小关系.



(第 5 题)

6. 已知直线 l 的斜率 $k=3$，$A(3, 5)$，$B(x, 7)$，$C(-1, y)$是这条直线上的三个点，求 xy 的值.

7. 已知过两点 $A(m^2+2, m^2-3)$，$B(-m^2-m+3, 2m)$ 的直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，求 m 的值.

8. 已知点 $A(-1, 2)$，$B(2, \sqrt{3})$，$P(1, 0)$，点 Q 是线段 AB 上的动点.

(1) 求直线 PQ 的斜率的范围；

(2) 求直线 PQ 的倾斜角的范围.

9. 入射光线问题.

(1) 已知一条光线从点 $A(-1, 3)$射向 x 轴，经过 x 轴上的点 P 反射后通过点 $B(3, 1)$，求点 P 的坐标；

(2) 已知一条光线从点 $A(2, 1)$射到 y 轴上的点 Q，经 y 轴反射后过点 $B(4, 3)$，求点 Q 的坐标及入射光线的斜率.

2.2 直线的方程

给定直线的斜率和直线上一点，或者给定两点，都能唯一确定一条直线．本节，我们将用给定的条件，将直线上所有点的坐标(x, y)满足的共同关系表示出来，这就是**直线方程**.

2.2.1 直线的点斜式方程

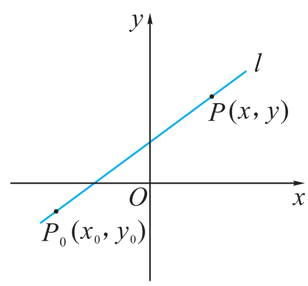


图 2.2－1

如图 2.2－1，已知直线 l 的斜率为 k，且 l 过已知点 $P_0(x_0, y_0)$，设 $P(x, y)$为 l 上不同于 P_0 的任意一点．因为直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，于是可得

$$y-y_0=k(x-x_0). \quad (1)$$

可以验证，直线 l 上的每个点(包括点 P_0)的坐标都是这个方程的解；反过来，以这个方程的解为坐标的点都在直线 l 上．我们称方程(1)为过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 的方程．由于该方程由直线上一定点及其斜率确定，因此把方程(1)称为直线的**点斜式方程**，简称**点斜式**.

当直线 l 与 x 轴垂直时，斜率不存在，其方程不能用点斜式表示，但因为 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，所以它的方程是

$$x=x_0.$$

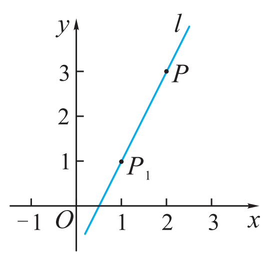


图 2.2－2

例 1 已知直线 l 经过点 $P(2, 3)$，斜率为 2，求直线 l 的方程，并画出该直线.

解 经过点 $P(2, 3)$，斜率为 2 的直线的点斜式方程是

$$y-3=2(x-2).$$

画该直线时，可在直线 l 上另取一点 $P_1(x_1, y_1)$，如取 $x_1=1$，$y_1=1$，得 $P_1(1, 1)$，过 P，P_1 作直线即为所求，如图 2.2－2.

例 2 已知直线 l 的斜率为 k，与 y 轴的交点是 $P(0, b)$，求直线 l 的方程.

解 经过点 $P(0, b)$，斜率为 k 的直线的点斜式方程是

$$y-b=k(x-0),$$

整理得

$$y=kx+b. \tag{2}$$

直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标称为直线 l 在 y 轴上的**截距**. 方程(2)由直线 l 的斜率和它在 y 轴上的截距确定，因此把方程(2)称为直线的**斜截式方程**，简称**斜截式**.

观察方程(2)，与我们初中学过的一次函数解析式相同. 从直线方程的角度来认识一次函数 $y=kx+b$，它的图象是一条直线，其中参数 k 是直线的斜率，常数 b 是直线在 y 轴上的截距.

练习

1. 写出满足下列条件的直线的点斜式方程：

(1) 经过点 $A(-2, 3)$，斜率为 3；

(2) 经过点 $B(3, 0)$，倾斜角是 $\frac{\pi}{6}$；

(3) 经过点 $C(-4, -2)$，倾斜角是 $\frac{2\pi}{3}$.

2. 写出满足下列条件的直线的斜截式方程：

(1) 斜率是 $\sqrt{3}$，在 y 轴上的截距是 -2；

(2) 倾斜角是 $\frac{\pi}{3}$，在 y 轴上的截距是 5.

2.2.2 直线的两点式方程

例 3 已知直线 l 上的两点 $A(2, 1)$ 和 $B(5, 2)$.

(1) 求直线 l 的斜率 k；

(2) 求直线 l 的方程.

解 (1) 由直线 l 过 $A(2, 1)$，$B(5, 2)$ 两点，得直线 l 的斜率 $k=\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$.

(2)经过点 $A(2, 1)$，斜率 $k=\frac{1}{3}$ 的直线的点斜式方程是

$$y-1=\frac{1}{3}(x-2),$$

化简得
$$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.$$

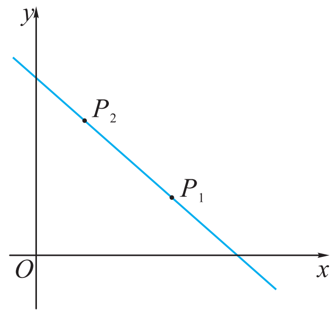


图 2.2-3

例 3 的实质是求过平面直角坐标系中横坐标不相同的两点的直线方程．那么这种方法可以推广到任意两点吗？

如图 2.2-3，设 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$是平面直角坐标系中的任意两点．

当 $x_1\neq x_2$ 时，直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$．

取直线上一点 $P_1(x_1,\ y_1)$，由点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

也可以去分母，化成$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$ 的形式．

当 $x_2=x_1$时，由于 P_1，P_2是不同的点，必然 $y_2\neq y_1$．此时直线垂直于 x 轴，方程为 $x=x_1$．也满足方程$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$．

我们把过任意两个不同的点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$的直线方程

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0 \qquad (3)$$

称为直线的**两点式方程**，简称**两点式**．

如果直线既不平行于 x 轴也不平行于 y 轴，则 $x_2\neq x_1$ 且 $y_2\neq y_1$，两点式方程可以写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (4)$$

思考：将方程(4)做一个变形，得到$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，它的左右两边各具有怎样的几何意义？该方程代表完整的一条直线吗？

例 4 已知直线 l 经过两点 $A(a,\ 0)$和 $B(0,\ b)$，其中 $ab\neq 0$，求直线 l 的方程．

解 过 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$的两点式方程为

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (5)$$

直线 l 与 x 轴的交点$(a, 0)$的横坐标称为直线 l 在 x 轴上的**截距**，此时直线在 y 轴上的截距是 b. 方程(5)由直线 l 在两个坐标轴上的截距 a 和 b 确定，称为直线的**截距式方程**.

例 5 如图 2.2-4，已知三角形的三个顶点为 $A(-3, 2)$，$B(5, -4)$，$C(0, -2)$，

(1) 求 BC 边所在直线的方程；

(2) 求 BC 边上的中线所在直线的方程.

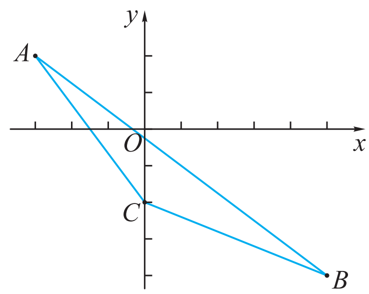


图 2.2-4

解 (1) 过 $B(5, -4)$，$C(0, -2)$的直线的两点式方程为

$$\frac{y-(-4)}{(-2)-(-4)}=\frac{x-5}{0-5}.$$

整理得

$$2x+5y+10=0.$$

这就是 BC 边所在直线的方程.

(2) BC 中点 M 的坐标为$\left(\frac{5+0}{2}, \frac{(-4)+(-2)}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, -3\right)$.

过 $A(-3, 2)$，$M\left(\frac{5}{2}, -3\right)$的直线的两点式方程为

$$\frac{y-2}{(-3)-2}=\frac{x-(-3)}{\frac{5}{2}-(-3)}.$$

整理得

$$10x+11y+8=0.$$

这就是 BC 边上的中线 AM 所在直线的方程.

> 两点式方程不必记忆，可先用过两点的直线的斜率公式算出斜率，再用点斜式写出方程.

练习

1. 求过下列两点的直线的两点式方程：

(1) $A(2, 5)$，$B(-3, -2)$； (2) $C(0, 3)$，$D(3, 0)$.

2. 写出满足下列条件的直线的方程，并画出图形：

(1) 在 x 轴上的截距是 3，在 y 轴上的截距是 2；

(2) 经过点$(2, 3)$，且在两坐标轴上的截距相等；

(3) 经过点$(-1, 2)$，且直线在 x 轴上的截距是其在 y 轴上截距的 2 倍.

3. 已知▱$ABCD$ 三个顶点的坐标为 $A(0, 0)$，$B(3, 0)$，$C(5, 3)$，求它的对角线 AC，BD 所在直线的方程.

2.2.3 直线的一般式方程

前面学习的几种直线的方程形式都是二元一次方程. 很自然地，我们会提出问题：

1. 平面直角坐标系中的每一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示吗?

2. 每一个关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线吗?

对于问题 1，我们知道，平面直角坐标系中的直线可以分为两类：一类与 x 轴不垂直，一类与 x 轴垂直. 过点 $P(x_0, y_0)$ 且与 x 轴不垂直的直线方程都可以写成点斜式 $y-y_0=k(x-x_0)$，它可化为 $kx-y-kx_0+y_0=0$ 的形式，此方程是关于 x，y 的二元一次方程；而过点 $P(x_0, y_0)$ 且垂直于 x 轴的直线方程为 $x=x_0$，它可化为 $x+0\cdot y-x_0=0$，可以认为是关于 x，y 的二元一次方程.

由此可知，平面直角坐标系中任意一条直线都可以用关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）来表示.

对于问题 2，判断任意一个二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）是否表示一条直线，就看能否把它化成直线方程的一种形式.

当 $B\neq 0$ 时，方程变形为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示过点 $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$，斜率为 $-\frac{A}{B}$ 的直线.

当 $B=0$ 时，由于 A，B 不同时为 0，必有 $A\neq 0$，于是方程可化为 $x=-\frac{C}{A}$，它表示一条与 y 轴平行或重合的直线.

根据以上的讨论，可得到下面的结论：

关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线.

我们把方程

$$Ax+By+C=0\ (A,\ B \text{ 不同时为 } 0) \qquad (6)$$

称为直线的**一般式方程**，简称**一般式**.

例 6 已知直线 l 的方程为 $3x+4y-12=0$.

（1）求直线 l 的斜率；

（2）求直线 l 与两条坐标轴所围成的三角形的面积.

解　(1) 将直线的一般式方程化为斜截式，得到

$$y=-\frac{3}{4}x+3.$$

因此，直线 l 的斜率 $k=-\frac{3}{4}$.

(2) (方法一) 如图 2.2-5，设直线 l 交 x 轴于点 $A(a, 0)$，交 y 轴于点 $B(0, b)$.

对于直线方程 $3x+4y-12=0$，令 $y=0$，得 $x=4$；令 $x=0$，得 $y=3$.

于是得 $a=4$，$b=3$.

因此

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|ab|=\frac{1}{2}\times4\times3=6.$$

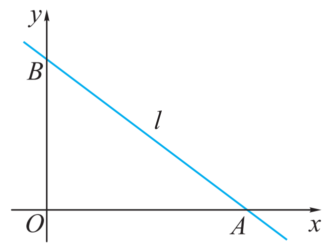


图 2.2-5

(方法二) 将直线的一般式方程 $3x+4y-12=0$ 化为截距式，得到

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$

于是得 $a=4$，$b=3$.

因此

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|ab|=\frac{1}{2}\times4\times3=6.$$

练习

1. 写出满足下列条件的直线的方程，并把它化成一般式：

(1) 经过点(3, 2)，倾斜角是直线 $x-\sqrt{3}y+3=0$ 的倾斜角的 2 倍；

(2) 经过两点 $A(2, 3)$，$B(3, -2)$；

(3) 经过点 $P(-2, 4)$，平行于 x 轴；

(4) 在 x 轴，y 轴上的截距分别为 $\frac{5}{2}$，-3.

2. 已知直线 l 的方程为 $5x-4y-20=0$，求直线 l 与两条坐标轴所围成的三角形的面积.

2.2.4 直线的方向向量与法向量

本章一开始就用斜率来表示直线的方向. 什么叫作直线 PQ 的方向? 很自然想到的是: 直线上两个不同点 P, Q 之间的有向线段的方向就是直线的方向, 可以用非零向量 $\overrightarrow{PQ}$ 来表示. 不过, 我们没有把直线 l 规定成有向直线, 直线 QP 与 PQ 是同一条直线, 两个相反向量 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$ 的方向都代表直线 PQ 的方向, 此时这两个方向平行. 因此, 我们把与直线 l 平行的非零向量 $\boldsymbol{v}$ 都称为 l 的**方向向量**, 用它们来表示直线的方向. 直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}$ 并不唯一, $\boldsymbol{v}$ 的所有的非零实数倍 $\lambda\boldsymbol{v}$ 都是方向向量; 反过来, 所有的方向向量都与 l 平行, 因此它们相互平行, 互为实数倍.

例 7 求直线 $y=kx+b$ 的全体方向向量.

解 直线上任意两点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 的坐标满足

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \text{ 即 } y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

$$\begin{aligned}\text{方向向量}\overrightarrow{PQ}&=(x_2-x_1, y_2-y_1)\\&=(x_2-x_1, k(x_2-x_1))\\&=(x_2-x_1)(1, k)=\lambda(1, k),\end{aligned}$$

其中 $\lambda=x_2-x_1$ 可以取任意非零实数.

斜率为 k 的直线的方向向量为 $(1, k)$ 的非零实数倍.

例 8 求直线 $3x+4y-12=0$ 的全体方向向量.

解 (方法一) 直线方程化为斜截式, 得 $y=-\frac{3}{4}x+3$, 其斜率 $k=-\frac{3}{4}$.

因此直线的全体方向向量为 $\lambda\left(1, -\frac{3}{4}\right)$, 其中 λ 为任意非零实数.

(方法二) 直线上任意两点 $P(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$ 的坐标满足等式

$$3x_0+4y_0-12=0, \quad ①$$

$$3x+4y-12=0. \quad ②$$

②-①得

$$3(x-x_0)+4(y-y_0)=0. \quad ③$$

将③式的左边写成数量积的形式, 得

$$(3, 4)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0. \quad ④$$

当 P, Q 两点不重合时, $\overrightarrow{PQ}=(x-x_0, y-y_0)$ 代表了直线 $3x+4y-12=0$ 的全体方向向量, 由④式可知, $\overrightarrow{PQ}$ 与向量 $(3, 4)$ 垂直, 因此这条直线与向量 $(3, 4)$ 垂直.

由 $3\times4+4\times(-3)=0$ 得到向量 $(4, -3)$ 与向量 $(3, 4)$ 垂直, 因此 $(4, -3)$ 是直线的一个方向向量, 直线的全体方向向量为 $\lambda(4, -3)=(4\lambda, -3\lambda)$, 其中 λ 为任

意非零实数.

例 8 方法二的推理适用于一般直线方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）.

首先，方程至少有一组解 (x_0, y_0) 满足等式

$$Ax_0+By_0+C=0 \quad ①$$

（例如，当 $A\neq0$ 时，$\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ 是解，当 $B\neq0$ 时，$\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ 是解），这说明方程的图象至少包含一点 $P(x_0, y_0)$，不是空集.

图象上任意两点 $P(x_0, y_0)$，$Q(x, y)$ 的坐标均满足方程，得

$$Ax_0+By_0+C=0,$$
$$Ax+By+C=0,$$

以上两个等式相减得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad ②$$

等式②的左边可看成向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$ 与 $\overrightarrow{PQ}=(x-x_0, y-y_0)$ 的数量积，则②式可改写为

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=(A, B)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0. \quad ③$$

③式用几何语言来描述就是

$$(A, B)\perp\overrightarrow{PQ}. \quad ④$$

这说明：过定点 P 及任意点 Q 的线段垂直于 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{ON}$，动点 Q 组成的图形就是过定点 P 且与 ON 垂直的直线 l（如图 2.2－6）.

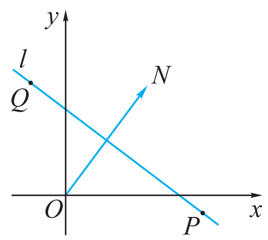


图 2.2－6

将②式看成两个向量的数量积，既便于我们从几何的角度来描述，又体现了向量沟通代数与几何的桥梁作用.

反过来，作与直线 l 垂直的非零有向线段 ON，我们取向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{ON}=(A, B)$. 已知直线 l 上一个定点 $P(x_0, y_0)$，则平面上任一点 $Q(x, y)$ 在直线 l 上的充分必要条件为：$ON\perp PQ$.

用向量运算叙述出来就是：

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow (A, B)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0$$
$$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

由此得到直线 l 的方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \quad (7)$$

当 P，Q 两点不重合时，$\overrightarrow{PQ}=(x-x_0,\ y-y_0)$代表直线 l 的全体方向向量，等式(7)的几何意义就是：向量$(A,\ B)$垂直于直线 l 的全体方向向量. 当 P，Q 两点重合时，$(x-x_0,\ y-y_0)=(0,\ 0)$是零向量，不是方向向量，仍与向量$(A,\ B)$垂直. 因此，$(x-x_0,\ y-y_0)$代表了直线 l 上的全体向量，它们都与向量$(A,\ B)$垂直. 因此，非零向量$(A,\ B)$与直线 l 垂直.

与直线 l 垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,\ B)$称为直线 l 的一个**法向量**.

直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 的一次项系数组成的向量$(A,\ B)$是直线的一个法向量.

反过来，已知直线的法向量$(A,\ B)$，就知道了一般式方程 $Ax+By+C=0$ 的一次项系数. 将直线上任一已知点$(x_0,\ y_0)$的坐标代入该方程，就可由 $Ax_0+By_0+C=0$ 得到待定常数 $C=-Ax_0-By_0$，进而得到直线方程 $Ax+By-Ax_0-By_0=0$，亦得到(7)式的形式.

例 9 写出满足下列条件的直线的方程：

(1) 垂直于向量$(3,\ 2)$，并且经过点 $A(2,\ 1)$；

(2) 经过点 $A(2,\ 1)$和 $B(5,\ 2)$.

解 (1)（方法一）设点$(x,\ y)$为直线上不同于点 A 的任意一点，直线的方向向量$(x-2,\ y-1)$垂直于向量$(3,\ 2)$，则有

$$(3,\ 2)\cdot(x-2,\ y-1)=3(x-2)+2(y-1)=0,$$

整理得一般式方程

$$3x+2y-8=0.$$

（方法二）由条件可知向量$(3,\ 2)$为所求直线的一个法向量，故可设直线的一般式方程为

$$3x+2y+C=0.$$

将点 $A(2,\ 1)$的坐标代入上述方程，得

$$3\times2+2\times1+C=0,$$

解得 $C=-8$.

因此直线方程为 $3x+2y-8=0$.

(2) 由已知条件可知直线的一个方向向量$\overrightarrow{AB}=(5-2,\ 2-1)=(3,\ 1)$.

又 $1\times3+(-3)\times1=0$，可知直线的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,\ -3)$.

因此可设直线的一般式方程为 $x-3y+C=0$.

将点 $A(2,\ 1)$的坐标代入上述方程，得

$$1\times2-3\times1+C=0,$$

解得 $C=1$.

因此直线方程为 $x-3y+1=0$.

练 习

1. 计算：

（1）已知直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，求 l 的一个方向向量和法向量；

（2）已知直线 l 的方向向量为 $(2, 3)$，求 l 的一个法向量；

（3）已知直线 l 经过点 $A(1, 1)$ 和 $B(2, 3)$，求 l 的一个方向向量和法向量.

2. 写出满足下列条件的直线的方程：

（1）垂直于向量 $(2, 3)$，并且经过点 $A(-3, 4)$；

（2）平行于向量 $(3, -5)$，并且经过点 $B(1, 2)$.

习题 2.2

学而时习之

1. 写出满足下列条件的直线的方程，并画图：

（1）斜率是 $-\frac{3}{4}$，经过点 $A(-2, 5)$；

（2）斜率为 -3，在 y 轴上的截距为 4；

（3）经过点 $A(5, -2)$，$B(-3, 6)$；

（4）在 x 轴，y 轴上的截距分别是 5，-6.

2. 已知点 $A(1, 2)$，$B(4, 3)$，$C(3, 5)$，写出直线 AB，BC，CA 的点斜式、两点式和一般式方程.

3. 已知直线 l 经过点 $P(-5, -4)$，且与两坐标轴围成的三角形面积为 5，求直线 l 的方程.

4. 若直线 l 的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$，求直线 l 的一个方向向量和法向量.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0, 4)$，$B(-2, 6)$，$C(-8, 0)$.

（1）求 AC 边上的中线 BD 所在直线的方程；

（2）求 AC 边所在直线的一个方向向量和法向量；

（3）求过 AC 中点，且垂直于 AC 方向向量的直线方程.

6. 菱形的两条对角线分别位于 x 轴和 y 轴上，其长度分别为 8 和 6，菱形的中心在原点，求菱形各边所在直线的方程.

7. 一条光线从点 $A(3, 2)$ 发出，经 x 轴反射后通过点 $B(-1, 6)$，求入射光线和反射光线所在直线的方程.

温故而知新

8. 写出满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过点 $(0, 5)$，且在两坐标轴上的截距之和为 2；

(2) 经过点 $(5, 0)$，且在两坐标轴上的截距之差为 2.

9. 在直线方程 $kx-y+1-3k=0$ 中，当 k 变化时，可得无数条直线，这所有的直线恒过哪一点？

10. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-8, 2)$，AB 边上的中线 CE 所在直线的方程为 $x+2y-5=0$，AC 边上的中线 BD 所在直线的方程为 $2x-5y+8=0$，求直线 BC 的方程.

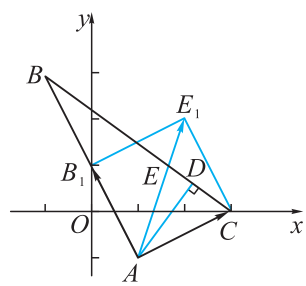
11. 已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，借助法向量推导直线 AB 的两点式方程.

12. 已知方向向量 $(B, -A)$ 和直线上一点 (x_0, y_0)，求该直线的方程.

13. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(1, -1)$，$B(-1, 3)$，$C(3, 0)$，AD 是 BC 边上的高，AE 是 $\angle BAC$ 的平分线.

(1) 求高 AD 所在直线的方程；

(2) 求 AE 所在直线的方程.（提示：在 $\overrightarrow{AB}$ 上取与 $\overrightarrow{AC}$ 长度相等的向量 $\overrightarrow{AB_1}$，则 $\overrightarrow{AE_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC}$ 的方向就是 $\overrightarrow{AE}$ 的方向.）



（第 13 题）

2.3 两条直线的位置关系

2.3.1 两条直线平行与垂直的判定

一 两条直线平行的判定

设在 xOy 平面上的两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，它们的方程分别是

$$l_1:\ y=k_1x+b_1,\quad l_2:\ y=k_2x+b_2.$$

首先，我们来研究两条直线平行(不重合)的情形.

平面几何中讲到，两直线与第三条直线相交，则这两条直线平行的充分必要条件是同位角相等. 如图 2.3－1，设两条直线的倾斜角分别为 α_1，α_2.

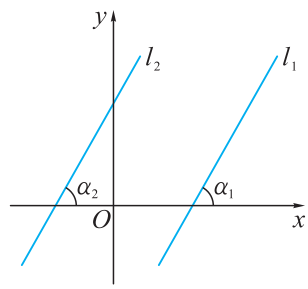


图 2.3－1

如果 $l_1 /\!/ l_2$，则 $\alpha_1=\alpha_2$，从而 $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，即 $k_1=k_2=k$.

此时，两条直线的方程分别为 $y=kx+b_1$，$y=kx+b_2$，并且 $b_1\neq b_2$.

反之，若 $k_1=k_2$，并且 $b_1\neq b_2$，则 $l_1 /\!/ l_2$.

由此得到

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2 \text{ 且 } b_1\neq b_2.$$

显然，根据上述结论，可以得到：若 $k_1=k_2$，并且 $b_1=b_2$，那么两条直线重合.

如果直线 l_1，l_2 的斜率都不存在，它们都与 x 轴垂直但在 x 轴上的截距不同，这时仍有 $l_1 /\!/ l_2$.

例 1 已知直线 l_1：$3x+2y-6=0$，l_2：$6x+4y-10=0$，试判断直线 l_1 与 l_2 是否平行.

解 将直线 l_1：$3x+2y-6=0$ 化为斜截式，得

$$y=-\frac{3}{2}x+3.$$

因此，直线 l_1 的斜率 $k_1=-\dfrac{3}{2}$，它在 y 轴上的截距 $b_1=3$.

将直线 l_2：$6x+4y-10=0$ 化为斜截式，得

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}.$$

因此，直线 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{3}{2}$，它在 y 轴上的截距 $b_2=\frac{5}{2}$.

由于 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$，

所以 $l_1 /\!/ l_2$.

例 2 已知四边形的四个顶点分别为 $O(0,0)$，$A(1,3)$，$B(-3,2)$，$C(-4,-1)$. 试判断四边形 $OABC$ 的形状，并说明理由.

解 如图 2.3-2.

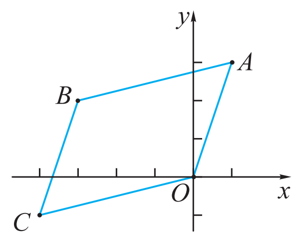


图 2.3-2

OA 边所在直线的斜率 $k_{OA}=3$，

AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=\frac{1}{4}$，

BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=3$，

CO 边所在直线的斜率 $k_{CO}=\frac{1}{4}$.

由 $k_{BC}\neq k_{CO}$，可知点 O 不在 BC 上，则 OA 与 BC 不重合.

又 $k_{OA}=k_{BC}$，得 $OA /\!/ BC$.

同理，由 $k_{AB}=k_{CO}$ 且 AB 与 CO 不重合，得 $AB /\!/ CO$.

因此四边形 $OABC$ 是平行四边形.

二 两条直线垂直的判定

设在 xOy 平面上的两条直线 l_1，l_2 的倾斜角分别为 α_1，α_2，它们的斜率分别为 k_1，k_2.

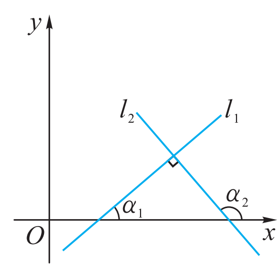


图 2.3-3

如图 2.3-3，如果 $l_1\perp l_2$，这时它们的倾斜角 α_1，α_2 相差 $\frac{\pi}{2}$，

不妨设 $\alpha_1=\alpha_2-\frac{\pi}{2}$，

则 $$\tan\alpha_1=\tan\left(\alpha_2-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha_2},$$

得 $$k_1k_2=-1.$$

反之，若 $k_1k_2=-1$，可以证明 $l_1\perp l_2$.

因此，当两条直线的斜率都存在时，可得到

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

?

如果两条直线 l_1，l_2 中的一条斜率不存在，那么这两条直线什么时候垂直？

例 3 如图 2.3-4，已知平面直角坐标系中三点 $A(4,3)$，$B(2,1)$，$C(5,-2)$. 证明：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

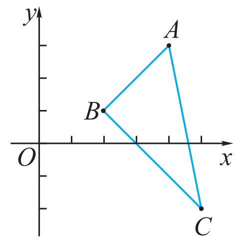


图 2.3-4

证明 由条件可知，$k_{AB}=\dfrac{1-3}{2-4}=1$，$k_{BC}=\dfrac{-2-1}{5-2}=-1$.

因为
$$k_{AB}\cdot k_{BC}=-1,$$
所以 $AB\perp BC$，即$\triangle ABC$ 是直角三角形.

例 4 已知 $\lambda\neq-1$，求 λ 取什么值时，直线 l_1：$2x+(\lambda+1)y=2$ 与直线 l_2：$\lambda x+y=1$：

（1）重合；　　（2）平行；　　（3）垂直.

解 直线 l_1 的斜率 $k_1=-\dfrac{2}{\lambda+1}$，它在 y 轴上的截距 $b_1=\dfrac{2}{\lambda+1}$.

直线 l_2 的斜率 $k_2=-\lambda$，它在 y 轴上的截距 $b_2=1$.

（1）重合$\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1=b_2\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2}{\lambda+1}=-\lambda,\\ \dfrac{2}{\lambda+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=1$.

（2）平行$\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2}{\lambda+1}=-\lambda,\\ \dfrac{2}{\lambda+1}\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=-2$.

（3）垂直$\Leftrightarrow k_1k_2=-1\Leftrightarrow\left(-\dfrac{2}{\lambda+1}\right)\cdot(-\lambda)=-1\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{1}{3}$.

我们知道斜率、方向向量、法向量都是刻画直线方向的几何要素. 前面，我们是根据斜率来判定两条直线平行与垂直，事实上也可以借助直线的方向向量或法向量来判定. 例如：已知两条直线的一般式方程为 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$.

（1）判定两条直线平行

$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow$法向量平行$\Leftrightarrow A_2=\lambda A_1$，$B_2=\lambda B_1$，$C_2\neq\lambda C_1$，$\lambda$ 为非零实数.

（2）判定两条直线垂直

$l_1\perp l_2\Leftrightarrow$法向量垂直$\Leftrightarrow(A_1,B_1)\cdot(A_2,B_2)=A_1A_2+B_1B_2=0$.

若已知直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $(1,k_1)$，$(1,k_2)$ 分别是方向向量，

$l_1\perp l_2\Leftrightarrow$方向向量垂直$\Leftrightarrow(1,k_1)\cdot(1,k_2)=1+k_1k_2=0\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

例 5 求过点 $A(-3,4)$，且与直线 l：$3x-4y+29=0$ 平行的直线.

解 （方法一）设所求直线 l_1 的方程为 $y=kx+b$.

由 $l_1 /\!/ l$，可知 $k=\dfrac{3}{4}$，即得直线 l_1 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x+b$.

将点 $A(-3,4)$的坐标代入上述方程，得

$$4=\frac{3}{4}\times(-3)+b,$$

解得 $b=\dfrac{25}{4}$.

因此，所求直线的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$.

（方法二）已知直线 l 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(3,-4)$，所求直线平行于 l，因而有同样的法向量 $\boldsymbol{n}=(3,-4)$，故可设其一般式方程为 $3x-4y+C=0$.

将点 $A(-3,4)$的坐标代入上述方程得

$$3\times(-3)-4\times4+C=0,$$

解得 $C=25$.

因此，所求直线的方程为 $3x-4y+25=0$.

> 方法一适用于斜率存在的情形，而方法二适用于所有情形.

练习

1. 判断下列各组直线的位置关系：

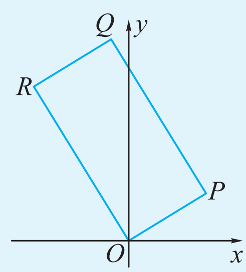
（1）l_1：$3x-4y-2=0$，l_2：$6x-8y-3=0$；

（2）l_1：$3x+2y-1=0$，l_2：$4x-6y+3=0$；

（3）l_1：$x-2y+3=0$，l_2：$4x-8y+12=0$.

2. 已知过点 $A(-2,m)$和 $B(m,4)$的直线与斜率为 -2 的直线平行，求 m 的值.

3. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OPQR$ 的顶点坐标按逆时针顺序依次为 $O(0,0)$，$P(1,t)$，$Q(1-2t,2+t)$，$R(-2t,2)$，其中 $t>0$. 试判断四边形 $OPQR$ 的形状.



（第 3 题）

4. （1）求过点$(1,2)$，且与直线 $2x+y-1=0$ 平行的直线方程；

（2）求过点$(-1,3)$，且与直线 $x-2y+3=0$ 垂直的直线方程.

2.3.2 两条直线的交点坐标

我们已经知道，任意一条直线都可以用一个二元一次方程来表示，也就是说直线方程是直线上每一个点的坐标满足的一个关系式. 为判断两条直线是否相交，进而寻求这两条直线的交点坐标，我们可以从直线方程入手来判断.

设两条直线的方程分别为

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0，$$
$$l_2：A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果这两条直线相交，由于交点同时在这两条直线上，交点的坐标一定是这两个方程的公共解；反之，如果将这两条直线的方程联立，若方程组有唯一解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和直线 l_2 的交点.

同样的道理，若方程组无解，则两条直线平行；若方程组有无数组解，则两条直线重合.

据此，我们有

方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$的解的情况	一组解	无　解	无数组解
直线 l_1，l_2 的公共点个数	一　个	零　个	无数个
直线 l_1，l_2 的位置关系	相　交	平　行	重　合

例 6 判断下列各组中直线的位置关系，若相交，求出交点的坐标：

（1）l_1：$2x+y+3=0$，l_2：$x-2y-1=0$；

（2）l_1：$x+y+2=0$，l_2：$2x+2y+3=0$；

（3）l_1：$x-y+1=0$，l_2：$2x-2y+2=0$.

解　（1）解方程组

$$\begin{cases}2x+y+3=0,\\x-2y-1=0,\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$$

因此直线 l_1 和 l_2 相交，交点坐标为$(-1，-1)$.

（2）解方程组

$$\begin{cases}x+y+2=0, & ①\\2x+2y+3=0, & ②\end{cases}$$

①×2−②得 1=0，矛盾.

由此可知方程组无解，因此直线 l_1 与 l_2 平行.

(3) 解方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0, & ① \\ 2x-2y+2=0, & ② \end{cases}$$

①×2 得　$2x-2y+2=0$.

说明方程②是方程①的 2 倍，方程①的解都是方程②的解.

因此直线 l_1 与 l_2 重合.

练习

1. 求两直线 $3x-2y-1=0$，$2x-3y-5=0$ 的交点坐标，并画出图形.

2. 已知直线 l_1：$2x+3y-m=0$ 与 l_2：$x-my+12=0$ 的交点在 y 轴上，求 m 的值.

3. 已知直线 l 过直线 l_1：$3x+4y-2=0$ 与 l_2：$2x+y+2=0$ 的交点，且平行于 l_3：$x+2y-5=0$，求直线 l 的方程.

习题 2.3

学而时习之

1. 根据下列给定的条件，用多种方法判断直线 l_1 与直线 l_2 的位置关系：

(1) l_1 经过点 $A(2, 1)$，$B(-3, 5)$，l_2 经过点 $C(3, -3)$，$D(8, -7)$；

(2) l_1 经过点 $A(-1, -2)$，$B(1, 2)$，l_2 经过点 $M(-2, 1)$，$N(2, -1)$.

2. 求证：顺次连接 $A(2, -3)$，$B\left(5, -\frac{7}{2}\right)$，$C(2, 3)$，$D(-4, 4)$ 四点所得的四边形是梯形.

3. 当 a 分别取什么值时，直线 l_1：$2ax+y-2=0$ 与 l_2：$2x+ay-2=0$ 重合，平行，垂直?

4. 求过点 $A(-1, 2)$ 且与直线 $2x-3y+4=0$ 平行的直线的方程.

5. 已知△ABC 的顶点坐标为 $A(-2, -4)$，$B(6, 6)$，$C(0, 6)$，

(1) 求 AC 边上的高所在直线的方程；

(2) 求线段 AB 的垂直平分线的方程.

6. 已知直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交，证明：方程 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ ($\lambda\in\mathbf{R}$)表示过 l_1 与 l_2 的交点的直线.

7. (1) 求经过直线 l_1：$x+3y-4=0$，l_2：$5x+2y+6=0$ 的交点，且过点$A(2,3)$的直线的方程；

(2) 求经过直线 l_1：$x-3y-4=0$ 和 l_2：$2x+y-1=0$ 的交点，且与直线 l_3：$3x-4y+5=0$ 垂直的直线的方程.

温故而知新

8. 已知直线 l_1：$(k-3)x+(4-k)y+1=0$ 与 l_2：$2(k-3)x-2y+3=0$ 平行，求 k 的值.

9. 已知$\triangle ABC$ 的顶点$B(2,1)$，$C(-6,3)$，其垂心为 $H(-3,2)$，求其顶点 A 的坐标.

10. 已知直线 l_1：$(a-2)x+3y+a=0$，l_2：$ax+(a-2)y-1=0$. 当 $l_1\perp l_2$ 时，求 a 的值及交点的坐标.

11. 某地 A，B 两村在平面直角坐标系上的位置分别为 $A(1,2)$，$B(4,0)$，一条河所在直线的方程为 $x+2y-10=0$. 若在河上建一座供水站 P，使分别到 A，B 两村的管道之和最省，问供水站 P 应建在什么地方？

12. 在$\triangle ABC$ 中，BC 边上的高所在直线的方程为 $x-2y+1=0$，$\angle BAC$ 的平分线所在直线的方程为 $y=0$，若点 B 的坐标为$(1,2)$，求点 A 和点 C 的坐标.

2.4 点到直线的距离

前面对直线做了大量定性的研究．既然直线可以用二元一次方程来表示，这就为我们在平面直角坐标系中，通过代数方法展开对直线定量的研究铺平了道路．

在本节，我们将用代数方法探究点到点的距离、点到直线的距离以及两条平行线之间的距离问题，其中，向量将发挥沟通代数与几何的“桥梁”作用．

一 两点间的距离

在平面直角坐标系中，已知两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$．如何求 A，B 之间的距离呢？

我们可以将点 A，B 的坐标看作向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的坐标，由向量的坐标运算，可得$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$．

因为 $|AB|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，

因此，可得平面内任意两点间的距离公式：

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

> 如果不用向量方法求 $|AB|$，就要作辅助线用勾股定理来计算，试试看．

例 1 已知$\triangle ABC$的三个顶点分别为 $A(-3, 1)$，$B(3, -3)$，$C(1, 7)$．

（1）求 BC 边上的中线 AM 的长；

（2）证明：$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形．

解 （1）由线段中点坐标公式可知，点 M 的坐标为$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-3+7}{2}\right)=(2, 2)$，

则 $|AM|=\sqrt{[2-(-3)]^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$．

（2）$|AB|=\sqrt{[3-(-3)]^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{13}$，

$|BC|=\sqrt{(1-3)^2+[7-(-3)]^2}=2\sqrt{26}$，

$|AC|=\sqrt{[1-(-3)]^2+(7-1)^2}=2\sqrt{13}$．

因为$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，且$|AB|=|AC|$，

所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形．

> 你能用向量方法证明$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形吗？

例 2 证明：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

分析 首先要建立适当的坐标系，将几何图形上的点用坐标表示出来，然后进行代数运算，最后把代数运算的结果“翻译”成几何关系.

证明 如图 2.4-1，以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AB，AC 所在直线为坐标轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0，0)$. 设 B，C 两点的坐标分别为$(b，0)$，$(0，c)$，BC 的中点为 D.

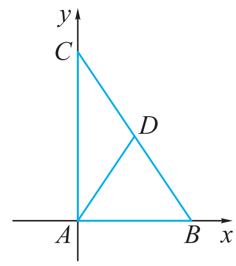


图 2.4-1

因为 D 是斜边 BC 的中点，故点 D 的坐标为$\left(\frac{b+0}{2}，\frac{0+c}{2}\right)$，即$\left(\frac{b}{2}，\frac{c}{2}\right)$.

由两点间距离公式，得

$$|BC|=\sqrt{(0-b)^2+(c-0)^2}=\sqrt{b^2+c^2}，$$

$$|AD|=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}.$$

所以
$$|AD|=\frac{1}{2}|BC|.$$

因此，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

练 习

1. (1) 求 $A(3，5)$，$B(-3，3)$两点间的距离；

(2) 已知点 $A(3，6)$，在 x 轴上的点 P 与点 A 的距离等于 10，求点 P 的坐标.

2. 已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$，对角线为 AC 和 BD.

求证：$|AC|=|BD|$.

二 点到直线的距离

如何求已知点 $P_0(x_0，y_0)$到已知直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离？

如图 2.4-2，过点 P_0 作直线 l 的垂线 P_0P_1，交 l 于点 $P_1(x_1，y_1)$，则 P_0 到直线 l 的距离 $d=|P_0P_1|$.

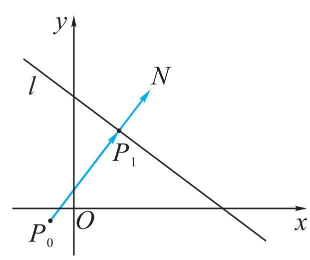


图 2.4-2

从 P_0 出发作有向线段表示直线 l 的法向量$\overrightarrow{P_0N}=(A，B)$.

由于两条线段 P_0P_1 和 P_0N 都与 l 垂直，因此它们共线，夹角为 0 或 π，则它们表示的向量的数量积的绝对值等于它们的长度的乘积，即

$$|\overrightarrow{P_0N}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}|=|P_0N||P_0P_1|.$$

由此得 $|(A,\ B)\cdot(x_1-x_0,\ y_1-y_0)|=\sqrt{A^2+B^2}\cdot d$,

则
$$d=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$=\frac{|(Ax_1+By_1+C)-(Ax_0+By_0+C)|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad ①$$

又点 $P_1(x_1,\ y_1)$在直线 l 上，则有 $Ax_1+By_1+C=0$. ②

将②式代入①式，得点 $P_0(x_0,\ y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

例 3 如图 2.4－3，已知△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(-1,\ 1)$，$B(2,\ 0)$，$C(3,\ 4)$.

(1) 求 AB 边上的高 CD 的长；

(2) 求△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}$.

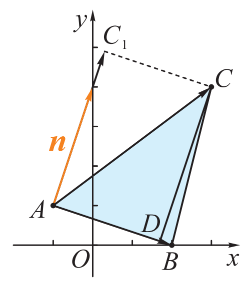


图 2.4－3

解 (1) 直线 AB 的一个方向向量
$$\overrightarrow{AB}=(2-(-1),\ 0-1)=(3,\ -1),$$
因此直线 AB 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,\ 3)$.

故可设直线 AB 的一般式方程为 $x+3y+C=0$.

将点 A 的坐标$(-1,\ 1)$代入上述方程得
$$-1+3\times1+C=0,$$
解得 $C=-2$.

因此直线 AB 的方程为 $x+3y-2=0$.

高 CD 的长即为点 $C(3,\ 4)$到直线 AB 的距离，则有
$$|CD|=\frac{|3+3\times4-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{13\sqrt{10}}{10}.$$

$$(2)\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-1)^2}\cdot\frac{13\sqrt{10}}{10}=\frac{13}{2}.$$

对于例 3，我们还可以从向量数量积的角度来求解. 如图 2.4－3，从点 A 出发作有向线段表示直线 AB 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,\ 3)$.

向量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\overrightarrow{DC}$ 都与 AB 垂直，因而相互平行，$|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|=|\boldsymbol{n}||DC|$.

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ 得到
$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{n}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC},$$
从而 $|\boldsymbol{n}||DC|=|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|=|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|=|(1,\ 3)\cdot(3-(-1),\ 4-1)|=13$.

因此 $|CD|=\frac{13}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{13}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{13}{10}\sqrt{10}.$

进一步，还可将 $|\boldsymbol{n}|=|(1,3)|=|(3,-1)|=|AB|$ 直接代入 $|\boldsymbol{n}||DC|=13$ 得到

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB||DC|=\frac{1}{2}\times13=\frac{13}{2}.$$

这种方法可以推广到平面直角坐标系中任意三角形，根据它的三个顶点的坐标求出三角形面积和各底边上的高. 你不妨试一试.

例 4 （1）求证：两条平行直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$ 与 l_2：$Ax+By+C_2=0$ 的距离是

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

（2）求平行直线 l_1：$4x-3y+6=0$ 与 l_2：$4x-3y-8=0$ 的距离.

分析 求两条平行直线的距离，可在其中一条直线上任取一点，求这个点到另一条直线的距离.

解 （1）在 l_1 上任取一点 $P(x_1,y_1)$，则 $Ax_1+By_1=-C_1$.

点 P 到 l_2 的距离 d 就是平行直线 l_1 与 l_2 的距离，即

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

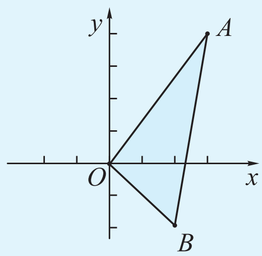
（2）由(1)所得公式，得直线 l_1 与 l_2 的距离

$$d=\frac{|6-(-8)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{14}{5}.$$

由例 4 可知，两条平行直线间的距离可以转化为点到直线的距离.

练习

1. 求点 $A(3,4)$ 到直线 $2x-3y+6=0$ 的距离.
2. 如图，求以 $A(3,4)$，$B(2,-2)$ 及坐标原点 O 为顶点的三角形 ABO 的面积.



（第 2 题）

3. 求两平行直线 $x-2y-2=0$，$2x-4y+3=0$ 之间的距离.
4. 已知直线 l 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，并且与原点的距离为 3，求直线 l 的方程.

习题 2.4

学而时习之

1. (1) 已知点 $M(2, 1)$ 和 $N(-1, 5)$，求 $|MN|$.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(2, 3)$，$B(-1, 0)$，$C(2, 0)$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

2. 证明：平行四边形四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

3. 求点 $A(-3, 4)$ 到直线 $3x-2y+6=0$ 的距离.

4. 求以 $A(2, 2)$，$B(2, -3)$，$C(-3, -1)$ 三点为顶点的三角形的面积.

5. 已知正方形中心的坐标是 $(1, 1)$，一边所在直线的方程是 $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$，求其余三边所在直线的方程.

6. 求两平行直线 $x-3y-2=0$，$2x-6y-3=0$ 之间的距离.

7. 求与直线 $x-y-1=0$ 平行且距离为 3 的直线的方程.

温故而知新

8. 等腰三角形 ABC 的顶点是 $A(3, 0)$，$|BC|=4$，BC 边的中点是 $D(5, 4)$，求此三角形的腰长.

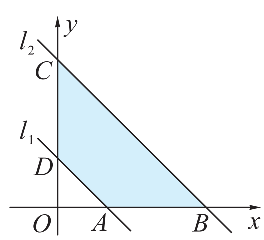
9. 已知直线 l 经过直线 l_1：$2x+y-5=0$ 与 l_2：$x-2y=0$ 的交点.

(1) 若点 $A(5, 0)$ 到 l 的距离为 3，求直线 l 的方程；

(2) 求点 $A(5, 0)$ 到 l 的距离的最大值.

10. 已知平行四边形中三个顶点的坐标为 $(4, 2)$，$(5, 7)$，$(-3, 4)$，求这个平行四边形的面积.

11. 如图，已知直线 l_1：$x+y-1=0$，现将直线 l_1 向上平移到直线 l_2 的位置，若 l_2，l_1 和坐标轴围成的梯形面积为 4，求直线 l_2 的方程.



(第 11 题)

12. 已知直线 l 过点 $P(3, 1)$，且被两平行直线 l_1：$x+y+1=0$，l_2：$x+y+6=0$ 截得的线段长为 5，求直线 l 的方程.

13. 已知两条平行直线分别过点 $A(6, 2)$ 和 $B(-3, -1)$，并且各自绕点 A，B 旋转，探索这两条平行线之间的距离的变化范围，是否有最大距离？若有，求出距离最大时两直线的方程.

2.5 圆的方程

在初中，我们用几何方法研究了圆的几何性质．现在，我们在平面直角坐标系中建立圆的方程，用代数方法进一步研究圆的性质．

2.5.1 圆的标准方程

《墨子·经上》云："圆，一中同长也．"这句朴素的定义用数学语言来描述就是：圆是平面内到一定点的距离等于定长的所有的点组成的集合．这个定点即圆心，而定长就是半径．只要给定了圆心和半径，这个圆就确定了．

在平面直角坐标系中，圆心可以用它的坐标表示．给定圆心 C 的坐标 (a, b) 和半径 r，就确定了一个圆（如图 2.5-1）．我们来求这个圆的方程，也就是求圆上任意一点 P 的坐标 (x, y) 满足的条件．

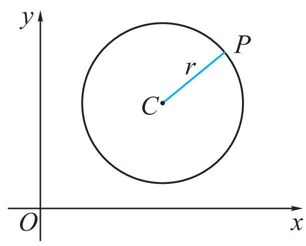


图 2.5-1

P 在圆上 $\Leftrightarrow |CP| = r$.

又 $|CP| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，

所以　　$P(x, y)$ 在圆上

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

这就得到了圆心为 $C(a, b)$，半径为 r 的圆的方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

把它叫作**圆的标准方程**．

特别地，圆心在原点 $(0, 0)$，半径为 r 的圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2.$$

想一想，点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 内的条件是什么？若点 M 在圆外，又满足什么条件呢？

例 1 求以 $C(3,5)$ 为圆心且经过原点 O 的圆的方程.

解 圆的半径 $r=|CO|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$，
故所求圆的方程为

$$(x-3)^2+(y-5)^2=34.$$

例 2 已知某圆经过 $A(-2,2)$，$B(6,0)$ 两点，圆心 M 在直线 $2x-y=1$ 上，求该圆的方程.

解 （方法一）设圆心为 $M(a,b)$，半径为 r，则圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

由题意可得方程组 $\begin{cases}(-2-a)^2+(2-b)^2=r^2,\\(6-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\2a-b=1.\end{cases}$

解此方程组，得 $\begin{cases}a=3,\\b=5,\\r=\sqrt{34}.\end{cases}$

故所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-5)^2=34$.

（方法二）如图 2.5-2，由于圆心 M 到点 A，B 的距离相等（都等于半径），因此圆心 M 在 AB 的垂直平分线 l 上，并且处于直线 l 与直线 $2x-y=1$ 的交点处.

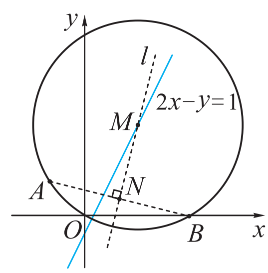


图 2.5-2

因为 $l\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AB}=(8,-2)$ 是 l 的一个法向量，故可设直线 l 的方程为

$$8x-2y+C=0. \quad ①$$

又直线 l 过 AB 的中点 N，而 N 的坐标为 $\left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$，即 $N(2,1)$，将其代入①式，解得 $C=-14$.

所以直线 l 的方程为 $8x-2y-14=0$，即 $4x-y=7$.

圆心 M 的坐标是方程组 $\begin{cases}4x-y=7\\2x-y=1\end{cases}$ 的解，

解此方程组，得 $\begin{cases}x=3,\\y=5.\end{cases}$

所以圆心 M 的坐标为 $(3,5)$.

圆的半径 $r=|AM|=\sqrt{(3+2)^2+(5-2)^2}=\sqrt{34}$.

故所求圆的方程为

$$(x-3)^2+(y-5)^2=34.$$

练 习

1. 求出满足下列条件的圆的标准方程：

(1) 圆心为 $C(2,\ -3)$，半径为 $\sqrt{2}$；

(2) 圆心为 $C(-2,\ 1)$，并经过点 $A(2,\ -2)$；

(3) 过点 $(0,\ 1)$ 和 $(2,\ 1)$，半径为 $\sqrt{5}$.

2. 已知点 $A\left(0,\ -\dfrac{9}{2}\right)$ 和 $B\left(4,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，求以线段 AB 为直径的圆的方程，并判断点 $P(5,\ -7)$，$Q(-\sqrt{5},\ -1)$ 是否在这个圆上.

3. 求圆心在直线 $2x-y-3=0$ 上，且过点 $(5,\ 2)$ 和 $(3,\ -2)$ 的圆的方程.

2.5.2 圆的一般方程

将圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

展开并移项得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

记 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$，方程可改写为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \qquad ①$$

那么形如①的二元二次方程是否都表示圆呢？

将方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F).$$

与圆的标准方程比较，可知

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①表示以点 $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①只有一个解，表示一个点 $\left(-\dfrac{D}{2},\ -\dfrac{E}{2}\right)$；

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①无实数解，不表示任何图形.

综上，我们将方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$ 叫作**圆的一般方程**.

例 3 将下列圆的方程化为标准方程，并写出圆的圆心和半径：

(1) $x^2+y^2+2x+4y-4=0$；

(2) $3x^2+3y^2+6x+3y-15=0$.

解 (1) 对方程左边配方，方程化为

$$(x+1)^2+(y+2)^2=9.$$

所以圆心的坐标为$(-1, -2)$，半径为 3.

(2) 方程两边除以 3，得

$$x^2+y^2+2x+y-5=0.$$

对方程左边配方，方程化为

$$(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

所以圆心的坐标为$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$，半径为$\frac{5}{2}$.

说一说，圆的标准方程与圆的一般方程各有什么特点？

圆的标准方程明确指出了圆心和半径，而圆的一般方程表明了方程形式上的特点.

要给出圆的标准方程，需要确定圆心坐标和半径；而要给出圆的一般方程，则需要确定一般方程中的三个系数 D，E，F.

> 圆的一般方程在方程形式上有特点，如 x^2，y^2 的系数都等于 1，没有 xy 项等.

例 4 已知 $A(0, 0)$，$B(6, 0)$，$C(-1, 7)$，求$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心坐标和半径.

分析 不在同一直线上的三个点可以确定一个圆. 求$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心坐标和半径，可以先求出圆的方程，这里可采用“待定系数法”.

解 设外接圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. ①

将圆上三点的坐标依次代入方程①，得到一个关于 D，E，F 的三元一次方程组

$$\begin{cases} F=0, \\ 36+6D+F=0, \\ 50-D+7E+F=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $D=-6$，$E=-8$，$F=0$.

因此，外接圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y=0$.

整理得 $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$.

所以外接圆的圆心坐标为$(3, 4)$，半径为 5.

> 想一想，能否通过求 AB 和 AC 的垂直平分线的交点找出圆心坐标，用距离公式求半径？这种解法与例 4 的解法相比，哪个更简便？

对于例 4，我们还可以设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，通过已知条件列方程组求解，不妨自己动手试一试.

练习

1. 判断下列方程分别表示什么图形，如果是圆，求出它的圆心坐标和半径.

(1) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$;

(2) $5x^2+5y^2+2x+4y+1=0$;

(3) $-5x^2-5y^2+2x+2y+1=0$;

(4) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$.

2. 讨论 $x^2+y^2+ax+2y+2=0$ 表示何种曲线.

3. 求过 $A(1, 0)$，$B(2, 1)$，$C(-2, 3)$ 三点的圆的方程，并指出这个圆的半径和圆心坐标.

习题 2.5

学而时习之

1. 写出下列各圆的方程：

(1) 圆心在原点的单位圆；

(2) 圆心为 $(1, 2)$，半径是 5；

(3) 圆心为 $(1, 2)$，经过点 $(2, 1)$；

(4) 圆心在 x 轴上，经过 $(2, 5)$ 与 $(6, 5)$ 两点.

2. 已知 $A(3, 2)$，$B(5, -3)$，$C(-1, 3)$ 三点，以 $P(2, -1)$ 为圆心作一个圆，使 A，B，C 三点中一点在圆外，一点在圆上，一点在圆内，求这个圆的方程.

3. 圆 C 的圆心在 x 轴上，并且过点 $A(-1, 1)$ 和 $B(1, 3)$，求圆 C 的方程.

4. 判断下列方程分别表示什么图形，如果是圆，求出它的圆心坐标和半径.

(1) $x^2+y^2-4x-6y=0$;

(2) $x^2+y^2+5x-6y=20$;

(3) $x^2+y^2-8x-6y+25=0$;

(4) $x^2+y^2-2ax-4by+3b^2-1=0$.

5. 过 $A(1, 3)$，$B(4, 2)$，$C(1, -7)$ 三点的圆交 y 轴于 M，N 两点，求 MN 的长度.

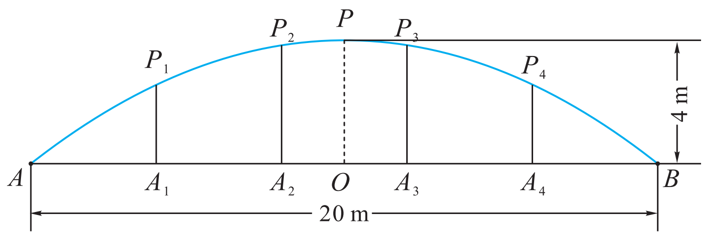
6. 已知圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，求 a 的值.

温故而知新

7. 试判断 $A(1, 0)$，$B(2, 1)$，$C(-2, 3)$，$D(-2, 1)$四点是否共圆，并说明理由.

8. 已知点 $A(-2, -2)$，$B(-2, 6)$，$C(4, -2)$，点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，求$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 的最值.

9. 如图是某圆拱桥的一孔圆拱的示意图，该圆拱跨度 $AB=20$ m，拱高 $OP=4$ m，在建造时每隔 4 m 需用一支柱支撑，求支柱 A_2P_2 的长度(结果精确到 0.01 m).



（第 9 题）

2.6 直线与圆、圆与圆的位置关系

2.6.1 直线与圆的位置关系

在初中我们知道，平面上的任意一条直线 l 与圆有三种位置关系：

（1）**相交**，直线与圆恰有两个公共点；

（2）**相切**，直线与圆恰有一个公共点；

（3）**相离**，直线与圆没有公共点.

直线与圆到底是哪一种位置关系，取决于圆心到直线的距离的大小. 设圆的半径为 r，圆心 C 到直线 l 的距离为 d（如图 2.6-1），则

（1）直线与圆相交 $\Leftrightarrow d<r$；

（2）直线与圆相切 $\Leftrightarrow d=r$；

（3）直线与圆相离 $\Leftrightarrow d>r$.

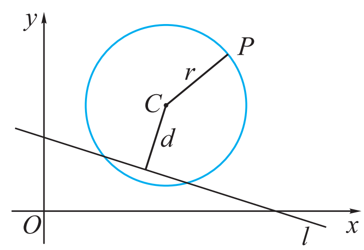


图 2.6-1

在平面上建立直角坐标系之后，直线用二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 表示，圆用二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示. 有两种方法可以判断直线和圆的位置关系：

方法一 将直线 l 的方程与圆的方程联立，得方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,\end{cases}$$

解此方程组看是否有公共解，进而通过解的个数判断直线与圆的位置关系.

方法二 由圆的方程计算出圆心坐标和半径，将圆心到直线的距离 d 与半径 r 进行比较，进而判断直线与圆的位置关系.

例 1 已知直线 l：$x+y+2=0$ 和圆 C：$x^2+y^2+2x-2y-18=0$，判断直线 l 与圆 C 的位置关系. 如果相交，求出它们的交点的坐标.

解 （方法一）由直线 l 与圆 C 的方程，得

$$\begin{cases}x+y+2=0,\\ x^2+y^2+2x-2y-18=0.\end{cases}$$

消去 y，得

$$x^2+4x-5=0.$$

因为 $$\Delta=4^2-4\times1\times(-5)=36>0,$$

所以直线 l 与圆 C 相交，有两个公共点.

（方法二）将圆 C 的方程通过配方化为标准方程

$$(x+1)^2+(y-1)^2=20,$$

可知它的圆心 C 的坐标为 $(-1,1)$，半径 $r=2\sqrt{5}$.

直线 l 的方程为 $x+y+2=0$，圆心 $C(-1,1)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<2\sqrt{5},$$

所以直线 l 与圆 C 相交，有两个公共点.

由 $x^2+4x-5=0$，解得

$$x_1=-5,\ x_2=1.$$

将 x_1，x_2 分别代入直线方程，得

$$y_1=3,\ y_2=-3.$$

所以直线 l 与圆 C 有两个交点，它们的坐标分别是

$$A(-5,3),\ B(1,-3).$$

例 2 过点 $P(-1,-1)$ 的直线 l 被圆 $(x+1)^2+(y-1)^2=6$ 截得的弦长为 4，求直线 l 的方程.

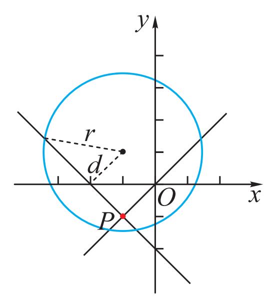


图 2.6-2

解 由圆的方程知，圆心坐标是 $(-1,1)$，半径 $r=\sqrt{6}$.

如图 2.6-2，因为直线 l 被圆截得的弦长为 4，故圆心到直线 l 的距离

$$d=\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

当直线 l 垂直于 x 轴时，即 l：$x=-1$，此时直线 l 过圆心，截得的弦长为 $2\sqrt{6}$，不符合条件.

当直线 l 不垂直于 x 轴时，因为直线 l 过点 $(-1,-1)$，故可设直线 l 的方程为

$$y+1=k(x+1),$$

即 $$kx-y+k-1=0.$$

于是圆心 $(-1,1)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|-k-1+k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2},$$

解得 $k=\pm1$.

因此，直线 l 的方程为 $x-y=0$ 或 $x+y+2=0$.

例 3 k 取什么值时，圆 $x^2+y^2=5$ 与直线 $y=kx+5$ 相切？

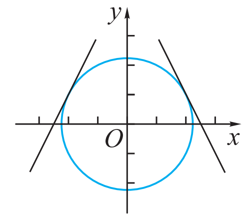


图 2.6－3

解 （方法一）由圆的方程可知圆心坐标为(0，0).

圆心到直线 $kx-y+5=0$ 的距离 $d=\dfrac{5}{\sqrt{1+k^2}}$.

圆与直线相切 $\Leftrightarrow d=\dfrac{5}{\sqrt{1+k^2}}=r=\sqrt{5}\Leftrightarrow 1+k^2=5\Leftrightarrow k=\pm 2$.

（方法二）由 $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ y=kx+5,\end{cases}$

消去 y 并整理得 $$(1+k^2)x^2+10kx+20=0. \quad ①$$

其判别式 $\Delta=(10k)^2-4\times 20(1+k^2)=20k^2-80$.

圆与直线相切 $\Leftrightarrow$ 方程①有唯一解

$$\Leftrightarrow \Delta=20k^2-80=0\Leftrightarrow k=\pm 2.$$

因此，圆 $x^2+y^2=5$ 与直线 $y=2x+5$ 及 $y=-2x+5$ 相切(如图 2.6－3).

例 4 设 $A(x_0，y_0)$是圆 O：$x^2+y^2=r^2$ 上一点，求过点 A 且与圆 O 相切的直线方程.

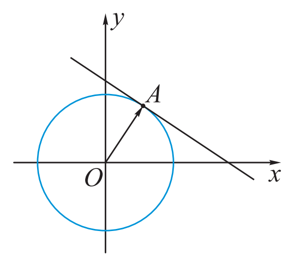


图 2.6－4

解 如图 2.6－4，所求直线垂直于过切点 A 的半径 OA，因此 $\overrightarrow{OA}=(x_0，y_0)$是直线的一个法向量. 故可设直线方程为

$$x_0x+y_0y+C=0. \quad ①$$

因为点 $A(x_0，y_0)$在直线上，将其坐标代入①式，得

$$x_0^2+y_0^2+C=0. \quad ②$$

又点 $A(x_0，y_0)$在圆 O 上，其坐标适合圆方程，即

$$x_0^2+y_0^2=r^2. \quad ③$$

由②、③可解得 $C=-r^2$.

故所求直线方程为

$$x_0x+y_0y-r^2=0.$$

练 习

1. 判断圆 $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 与下列直线的位置关系：

(1) $x+y=5$； (2) $x-y+5=0$； (3) $4x+3y=24$.

2. 过点(6，-4)的直线 l 被圆 $x^2+y^2=20$ 截得的弦长为 $6\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

3. 求平行于直线 $2x-y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线的方程.

4. 已知直线 l 过点(-2，0)，当直线 l 与圆 $x^2+y^2=2x$ 有两个交点时，求其斜率 k 的取值范围.

2.6.2 圆与圆的位置关系

前面我们运用直线与圆的方程，研究了直线与圆的位置关系．现在我们运用圆的方程，研究圆与圆的位置关系．

设两圆的半径分别是 r_1，r_2(不妨设 $r_1 \geqslant r_2$)，两圆圆心的距离为 d，则两圆有如下位置关系(图 2.6－5)：

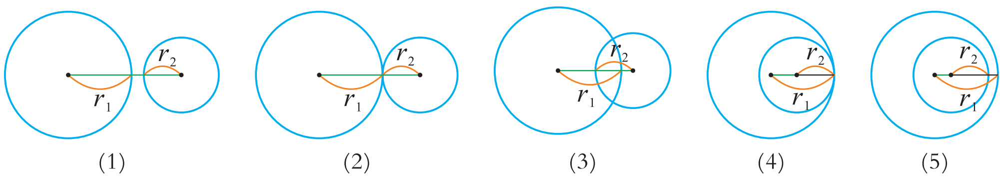


图 2.6－5

(1) $d>r_1+r_2$，两圆外离，无公共点(如图 2.6－5(1))；

(2) $d=r_1+r_2$，两圆外切，一个公共点(如图 2.6－5(2))；

(3) $r_1-r_2<d<r_1+r_2$，两圆相交，两个公共点(如图 2.6－5(3))；

(4) $d=r_1-r_2>0$，两圆内切，一个公共点(如图 2.6－5(4))；

(5) $d<r_1-r_2$，大圆内含小圆，无公共点(如图 2.6－5(5))；

(6) $d=0$，两圆同心(当 $r_1=r_2$ 时，两圆重合)．

给出了两圆的方程之后，就知道了两圆的半径 r_1，r_2 及圆心坐标，并可根据圆心坐标算出两圆心之间的距离 d，进而由 d 的大小就可以判断两圆具有上述哪种位置关系．下面我们举例来说明．

例 5 判断圆 C_1：$x^2+y^2-2x-3=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 的位置关系．

解 把圆 C_1 的方程化成标准方程，得

$$(x-1)^2+y^2=4.$$

圆 C_1 的圆心是点(1，0)，半径 $r_1=2$．

把圆 C_2 的方程化成标准方程，得

$$(x-2)^2+(y+1)^2=2.$$

圆 C_2 的圆心是点(2，-1)，半径 $r_2=\sqrt{2}$．

两圆心之间的距离 $d=\sqrt{(1-2)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{2}$，

从而 $$r_1-r_2<\sqrt{2}<r_1+r_2,$$

所以圆 C_1 与圆 C_2 相交，它们有两个公共点(如图 2.6－6)．

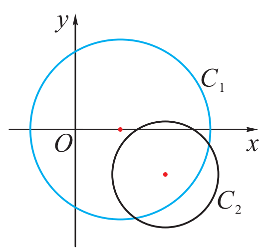


图 2.6－6

例 6 证明圆 C_1：$x^2+y^2-4x-16=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+2y-4=0$ 内切，并求它们的公切线方程.

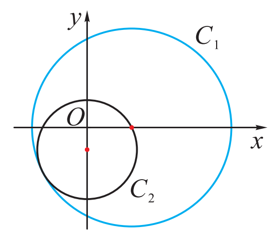


图 2.6-7

解 将圆 C_1 的方程化成标准方程，得

$$(x-2)^2+y^2=20,$$

则圆心坐标为(2，0)，半径 $r_1=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

将圆 C_2 的方程化成标准方程，得

$$x^2+(y+1)^2=5,$$

则圆心坐标为(0，−1)，半径 $r_2=\sqrt{5}$.

两圆心之间的距离 $d=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=r_1-r_2$，因此两圆内切(如图 2.6-7).

为求公切线方程，需要求切点坐标. 切点是两圆唯一的公共点，其坐标即为方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-16=0, & ① \\ x^2+y^2+2y-4=0 & ② \end{cases}$$

的解.

②−①，得 $4x+2y+12=0$， ③

即 $y=-2x-6$. ④

将④代入②，整理得

$$x^2+4x+4=0.$$

解此方程，得唯一解 $x=-2$，代入④，得 $y=-2$. 故切点坐标为(−2，−2).

> 我们可以通过联立方程求解得到一个公共解，这证明了两圆相切，但到底是内切还是外切仍需讨论.

过切点(−2，−2)、圆心(2，0)的直线的一个方向向量为(2−(−2)，0−(−2))=(4，2)，并且与切线方向垂直，因此向量(4，2)是切线的一个法向量，故可设切线的一般式方程为

$$4x+2y+C=0.$$

将切点(−2，−2)的坐标代入上述方程，解得 $C=12$.

因此，所求切线方程为 $2x+y+6=0$.

> 最后求出的切线方程不就是③式吗？③式后面的运算是否都可以省去？这个问题值得思考.

例 7 已知圆 C_1：$x^2+y^2+x+2y-3=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-6=0$ 相交，求经过圆 C_1 与圆 C_2 的两个交点的直线方程.

分析 两圆相交，它们的交点的坐标应同时满足两个圆方程.

解 将圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+2y-3=0, & ① \\ x^2+y^2-6=0. & ② \end{cases}$$

①−②，得

$$x+2y+3=0. \quad ③$$

这是二元一次方程，它的图象是一条直线.

> 同学们可求出两个交点坐标，进而求出直线方程，看是否与③式吻合.

两圆的交点 A，B 的坐标同时满足方程①和②，因此也满足方程③，也就是说，这两个交点都在直线 $x+2y+3=0$ 上.

因此，$x+2y+3=0$ 就是经过两圆交点 A，B 的直线方程.

练习

1. 判断圆 C_1：$x^2+y^2+2x-6y+1=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-4x+2y-11=0$ 的位置关系.

2. 求 a 为何值时，两圆 $x^2+y^2-2ax+4y+a^2-5=0$ 和 $x^2+y^2+2x-2ay+a^2-3=0$

(1) 外切；　　(2) 内切.

3. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+4x-6y+4=0$ 与圆 C_2：$2x^2+2y^2=1$ 相交于 A，B 两点，求直线 AB 的方程.

习题 2.6

学而时习之

1. 已知圆 $x^2+y^2=2$，直线 $y=x+b$，当 b 为何值时，圆与直线相交、相切、相离？

2. 过点 $P(-3,\ -4)$ 作直线 l，当 l 的斜率为何值时，

(1) 直线 l 将圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 平分？

(2) 直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相切？

(3) 直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相交，且所截得的弦长为 2？

3. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-6x-8y=0$，设该圆过点(3，5)的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD，求四边形 $ABCD$ 的面积.

4. 求圆心为(1，2)且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程.

5. 自点 $A(-3,\ 3)$发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射后，其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在直线的方程.

6. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2-6x-8y+20=0$ 的两条切线，设切点分别为 P，Q，求线段 PQ 的长.

7. 已知两个圆 $x^2+y^2=9$，$x^2+(y-6)^2=r^2$，求两圆分别满足下列条件时 r 的取值范围：

（1）相交；（2）相切；（3）外离.

8. 点 M 在圆 C_1：$x^2+y^2+6x-2y+1=0$ 上，点 N 在圆 C_2：$x^2+y^2+2x+4y+1=0$ 上，求 $|MN|$ 的最大值.

9. 已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x-6y+1=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-4x+2y-11=0$，求两圆的公共弦所在直线的方程及公共弦长.

温故而知新

10. 已知一圆过 $P(4,-2)$，$Q(-1,3)$两点，且在 y 轴上截得的弦长为 $4\sqrt{3}$，求该圆的方程.

11. 已知直线 $ax+by+c=0(abc\neq0)$与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，试判断三边长分别为 $|a|$，$|b|$，$|c|$的$\triangle ABC$ 的形状，并说明理由. 若直线与圆的位置发生变化，试分析$\triangle ABC$(其中$|c|$所对的角 C 为最大内角)形状的变化规律.

12. 已知直线 l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A，B 两点，过 A，B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于C，D 两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，求$|CD|$.

13. 已知过点 $A(0,1)$且斜率为 k 的直线 l 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M，N 两点.

（1）求 k 的取值范围；

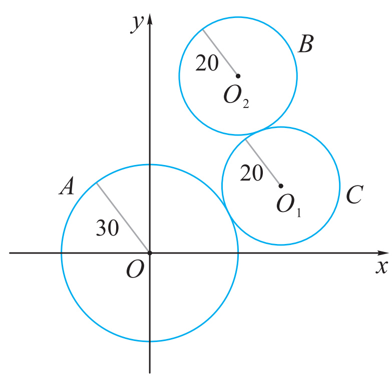
（2）若$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$，其中 O 为坐标原点，求$|MN|$.

14. 求通过圆$(x-3)^2+(y-4)^2=25$ 上的一点 $A(6,8)$的圆的切线方程.

15. 过点$(3,1)$作圆$(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B，求直线 AB 的方程.

16. 已知圆 C 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 外切，并且与直线 $x+\sqrt{3}y=0$ 相切于点$Q(3,-\sqrt{3})$，求圆 C 的方程.

17. 在某传动机械中，有如图所示的三个分别啮合的圆形齿轮 A，B，C. 已知主动轮 A 的圆心是 $O(0,0)$，半径为 30；被动轮 B 的圆心是 $O_2(30,60)$，半径为 20；齿轮 C 的半径也是 20. 试确定齿轮 C 的圆心 O_1 的坐标(精确到 0.01).



（第 17 题）

2.7 用坐标方法解决几何问题

平面解析几何的基本思想方法就是在平面直角坐标系中，把点用坐标表示，将直线与圆等曲线用方程表示，通过研究方程来研究图形的性质，这种代数研究方法被称为**坐标法**．下面我们通过更多的例子来说明怎样用坐标法来解决几何问题．

例 1 （1）证明：圆的直径所对的圆周角是直角；

（2）已知 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$两点，满足条件 $PA\perp PB$ 的所有点 $P(x,\ y)$组成一条曲线，求这条曲线的方程并指出曲线的形状．

解 （1）如图 2.7－1，以已知圆的圆心 O 为原点，给定的直径 AB 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2,$$

其中 r 是圆的半径．直径两端点的坐标分别为 $A(r,\ 0)$，$B(-r,\ 0)$．

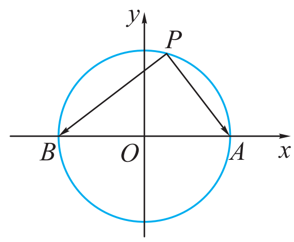


图 2.7－1

设 $P(x,\ y)$是圆上任意一点，则

$$x^2+y^2=r^2.$$

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(r-x,\ -y)\cdot(-r-x,\ -y)$

$$\begin{aligned}&=(r-x)(-r-x)+(-y)^2\\&=x^2-r^2+y^2\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$.

因此当 P 与 A，B 都不重合时，直径 AB 所对的圆周角$\angle APB$ 是直角．

（2）$PA\perp PB\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow(x_1-x,\ y_1-y)\cdot(x_2-x,\ y_2-y)=0\\&\Leftrightarrow(x_1-x)(x_2-x)+(y_1-y)(y_2-y)=0.\end{aligned}\qquad ①$$

将方程①的左边展开，可得

$$x^2-(x_1+x_2)x+y^2-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0.$$

配方，得

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2.$$

满足条件的曲线是以 AB 的中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 为圆心、AB 长度的一半 $\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{2}$ 为半径的圆，也就是以 AB 为直径的圆，如图 2.7-2 所示.

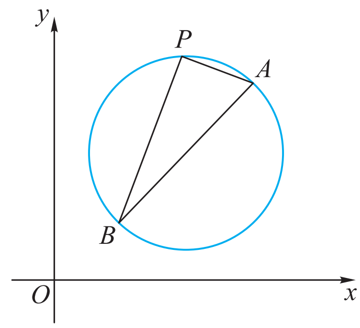


图 2.7-2

例 2 到两个定点 A，B 的距离之比为定值 λ（$\lambda>0$）的所有的点组成什么形状的曲线?

解 如图 2.7-3，以 B 为原点、$\overrightarrow{BA}$ 的方向为 x 轴正方向，在平面上建立直角坐标系，则 B，A 的坐标分别为 $B(0,\ 0)$，$A(a,\ 0)$，其中 $a=|AB|>0$.

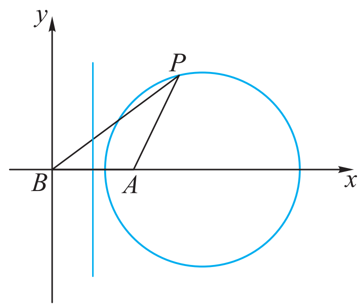


图 2.7-3

设 $P(x,\ y)$ 是平面上任意一点，则

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\lambda \Leftrightarrow |PA|=\lambda|PB|$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+y^2=\lambda^2(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda^2)x^2+(1-\lambda^2)y^2-2ax+a^2=0. \quad ①$$

等式①就是所求曲线的方程，接下来探讨该曲线的形状.

当 $\lambda=1$ 时，曲线方程为 $-2ax+a^2=0$，即 $x=\frac{a}{2}$，这是线段 AB 的垂直平分线.

当 $\lambda\neq1$ 时，①式可化为

$$x^2+y^2-\frac{2a}{1-\lambda^2}x+\frac{a^2}{1-\lambda^2}=0. \quad ②$$

配方，得

$$\left(x-\frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2. \quad ③$$

这是圆的标准方程.

可知当 $\lambda\neq1$ 时，曲线是圆.

例 3 $\triangle ABC$ 的顶点 B，C 的坐标分别是 $(-3,\ -1)$，$(2,\ 1)$，顶点 A 在圆 $x^2+y^2+4x-8y+16=0$ 上运动，求 $\triangle ABC$ 的重心 G 的轨迹方程.

分析 重心 G 的轨迹方程是指点 G 的坐标 $(x,\ y)$ 满足的关系式. 点 A 在已知圆上运动，点 A 的坐标满足圆的方程. 建立点 G 与点 A 坐标之间的关系，就可以建立点 G 的坐标满足的条件，进而求出点 G 的轨迹方程.

解 设 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标是 $(x,\ y)$，点 A 的坐标是 $(x_0,\ y_0)$.

已知点 B，C 的坐标分别是 $(-3,\ -1)$，$(2,\ 1)$，则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标满足

$$x=\frac{(-3)+2+x_0}{3},\quad y=\frac{(-1)+1+y_0}{3}.$$

因此有

$$x_0=3x+1,\quad y_0=3y. \tag{①}$$

因为点 A 在圆 $x^2+y^2+4x-8y+16=0$ 上运动，所以点 A 的坐标 (x_0, y_0) 满足方程 $x^2+y^2+4x-8y+16=0$，即满足方程

$$(x+2)^2+(y-4)^2=4. \tag{②}$$

将①代入②，得

$$(3x+1+2)^2+(3y-4)^2=4.$$

即所求轨迹方程为

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

$\triangle ABC$ 的重心 G 的轨迹是以 $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ 为圆心，半径为 $\frac{2}{3}$ 的圆(如图 2.7－4).

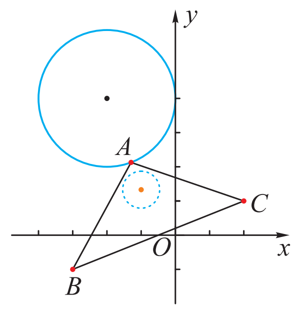


图 2.7－4

笛卡儿创立解析几何后，人们借助坐标系把形与数联系起来，使几何问题可以通过建立坐标，用代数方法来解决. 在将几何问题转化为代数问题并实施代数运算的过程中，我们可以利用几何定理得出坐标之间的关系，也可以将图形用向量语言来描述，用向量运算来解决，再转化为坐标之间的关系. 下面，我们以流程图的形式(图 2.7－5)来展现用代数方法解决几何问题的基本过程：

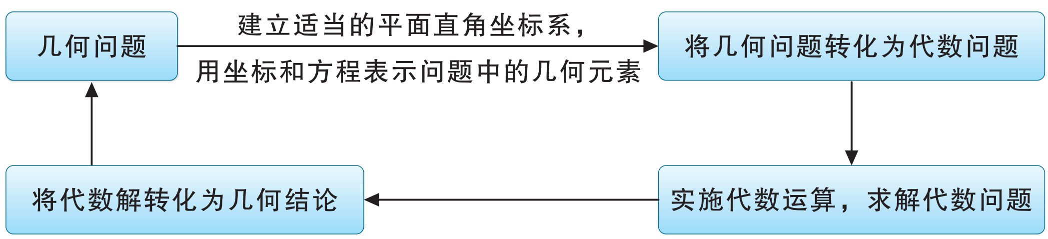


图 2.7－5

练 习

1. 等腰三角形的顶点是 $A(4, 2)$，底边的一个端点是 $B(3, 5)$，求另一个端点 C 的轨迹方程.

2. 已知一曲线是与两个定点 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹，求这个曲线的方程，并画出该曲线.

3. 已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $(4, 3)$，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 中点的轨迹方程.

习题 2.7

学而时习之

1. (1) 求证：矩形的对角线相等.

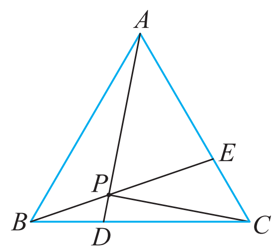
(2) 求证：菱形的对角线互相垂直平分.

2. 已知两条直线 l_1：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，l_2：$y=\sqrt{3}x$，求到这两条直线距离相等的所有的点组成的轨迹方程.

3. 已知点 A 是圆 C：$x^2+y^2-4x=0$ 上一动点，O 为坐标原点，连接 OA 并延长到 B，使 $|OA|=|AB|$. 问：所有满足条件的点 B 组成的曲线是什么形状的？

温故而知新

4. 如图，在等边三角形 ABC 中，点 D，E 分别在边 BC，AC 上，且 $|BD|=\frac{1}{3}|BC|$，$|CE|=\frac{1}{3}|CA|$，AD，BE 相交于点 P. 求证：$AP\perp CP$.

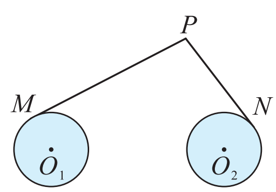


(第 4 题)

5. 已知点 $P(x, y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，求 $\frac{y}{x+2}$ 的最大值与最小值.

6. 从定点 $A(-3, -5)$ 向圆 $x^2+y^2-6x-6y+14=0$ 任意引一割线交圆于 P，Q 两点，求弦 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

7. 如图，圆 O_1 和圆 O_2 的半径都等于 1，$|O_1O_2|=4$. 过动点 P 分别作圆 O_1，圆 O_2 的切线 PM，PN(M，N 为切点)，使得 $|PM|=\sqrt{2}|PN|$. 试建立平面直角坐标系，并求动点 P 的轨迹方程.



(第 7 题)

数学文化

解析几何的诞生与发展

从 14 世纪到 17 世纪，欧洲经历了一场影响深远的思想文化运动，这是一段科学与艺术的革命时期. 那时人们以复兴古代希腊、罗马文化为号召来表达自己的文化主张，因而被称为文艺复兴运动.

文艺复兴运动伴随着资本主义生产力的发展，对科学技术提出了全新的要求. 机械的使用、航海业的发展以及武器的改进等诸多需求，使得对运动与变化的研究成为科学的中心问题. 另一方面，16 世纪代数学的发展为研究运动与变化创造了必要条件. 1591 年法国数学家韦达(1540—1603)首先在代数中有意识地使用字母，不仅用字母表示未知数，而且表示已知数，包括方程中的系数和常数. 内外因素的促进，导致了变量数学亦即近代数学的兴起.

解析几何的发明，是变量数学的第一座里程碑.

解析几何的出发点，是用坐标确定点的位置. 这种思想古已有之. 古希腊的数学家和地理学家埃拉托色尼(约前 275—前 194，他还是历史学家、诗人、天文学家)就设计出了地球上的第一套经纬度系统，还画了一张有 7 条经线和 6 条纬线的世界地图. 他已经发明了比平面坐标系还复杂的球面坐标系！

但是，解析几何诞生的标志还不仅仅是坐标，而是通过坐标建立曲线与方程的联系. 古希腊数学家关于圆锥曲线性质的推导，阿拉伯人利用圆锥曲线交点来求三次方程的根，都蕴含了这种思想. 法国数学家奥雷斯姆(约 1323—1382)在《论形态幅度》一书中提出的形态幅度原理(或称图线原理)，已经接触到函数图象的表示法. 他被认为是解析几何最重要的前驱.

解析几何的真正发明，归功于另外两位法国人：笛卡儿(1596—1650)和费马(1601—1665).

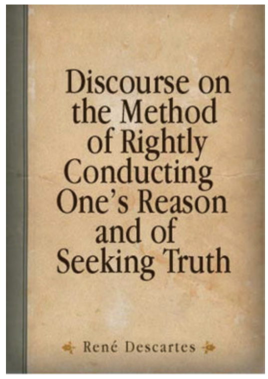

费马

为了恢复失传的古希腊数学家阿波罗尼奥斯(约前 262—前 190)的著作《论平面轨迹》，费马在 1630 年撰写了论文《平面与立体轨迹引论》，其中清晰地阐述了他所提出的解析几何原理. 他指出：“两个未知量决定的一个方程式，对应着一条轨迹，可以描绘出一条直线或曲线.”他还对一般直线和圆的方程，以及双曲线、椭圆、抛物线进行了讨论. 后来他还在通信中谈到了柱面、椭圆抛物面、双叶双曲面和椭球面，指出了含有三个未知量的方程表示一个曲面等结论. 但是，《平面与立体轨迹引论》这一重要著作在他去世 14 年后才出版，因而人们对解析几何的认识

主要来自笛卡儿.

费马是从方程出发研究轨迹的. 而笛卡儿相反，他从一个古老的轨迹问题出发，来寻找轨迹对应的方程. 殊途同归，都导致了解析几何这一重大发明.

笛卡儿的名言：“我思故我在.”



笛卡儿的哲学论著：《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》

笛卡儿在1637年发表了著名的哲学著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》，简称《方法论》. 此书有三个附录，分别是《光学》《气象学》和《几何学》. 在《几何学》中，他从一个著名的求轨迹的古希腊数学问题出发，引出了自己的方法：将坐标通过“点动成线”的观点具体地用到建立轨迹的方程上. 对方程他不仅把它看成是未知数和已知数的关系式，而且更多地把它看成两个变量之间的关系式. 这是研究曲线的新方法的思想基础. 这里他引出了斜角坐标系和直角坐标系，但是还没有引入 y 轴. 笛卡儿把对图形的研究转化为对方程的研究，促进变量进入数学，具有划时代的意义.

笛卡儿把《几何学》作为《方法论》的附录，意味着他的几何学发现(乃至光学、气象学等更多的见解)是在其方法论原理指导下获得的. 对更广泛的问题，他提出了一个大胆的计划：

“一切问题可以转化成数学问题；一切数学问题可以转化成代数问题；一切代数问题可以转化成方程的问题.”

这样的想法似乎把世界看得太简单了. 但使用笛卡儿坐标方法，确实能把一切初等几何中的问题转化为代数方程问题或代数式之间的不等式问题.

几何问题化为代数方程或代数不等式问题，并不意味着问题得到了解答. 因为对应的多变元的代数方程组可能是很复杂的问题. 直到340年后的1977年，中国的杰出数学家吴文俊(1919—2017)，遵循元朝数学家朱世杰的思想与方法的基本实质，采用美国数学家里特(1893—1951)提出的某些原理，总结出用电子计算机处理多项式方程组的一般方法，才给出了等式型初等几何命题机械化判定的有效算法，国际上誉为吴消元法. 至于几何不等式的机械化判定，以及几何问题的机械化类人

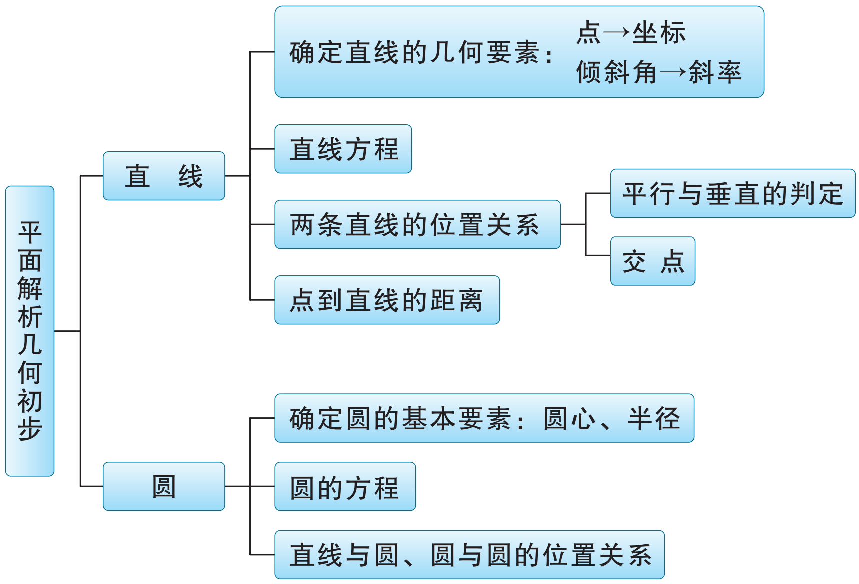
求解等进一步的难题，也在以后的二十年间相继被中国科学家突破.

由费马和笛卡儿开创的解析几何，在后人的工作中日趋完善并得到发展. 瑞士数学家克莱姆(1704—1752)引入 y 轴；英国数学家沃利斯(1616—1703)引进负的纵、横轴并导出了各种圆锥曲线方程；瑞士数学家雅科布·伯努利(1654—1705)引入了极坐标，极大地便利了某些曲线方程的建立. 德国数学家赫尔曼(1678—1733)把极坐标的概念进一步完善，并给出了直角坐标系和极坐标系的变换公式. 瑞士数学家欧拉(1707—1783)在1748年出版的《无穷小分析引论》中，给出了现代形式下的解析几何的系统叙述，这是现代意义下的第一本解析几何.

解析几何用坐标把点和数组对应起来. 数能加，点呢？如果直接对点运算，不是更简单吗？1788年，法国数学家拉格朗日(1736—1813)在他的《解析力学》中以向量形式表示力、速度、加速度等具有方向的量，后经众多数学家的努力，诞生了“向量代数”. 为弥补向量代数的不足，我国数学家莫绍揆(1917—2011)又创立了质点几何. 这些都可以看作是解析几何的新发展. 关于这方面的研究，仍在进行之中.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1．在平面几何中，我们对几何图形做了大量定性的研究．解析几何的创立，为我们研究几何问题提供了新的视角：借助于坐标系，将几何问题转化为代数问题来研究．直线与圆是基本的几何图形．以用代数方法研究直线为例，过一点沿着确定的方向就可以画出一条直线．如何用代数语言来刻画直线的方向，进而确定直线的方程？

2．写出直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式方程，并指出这些方程中系数的几何意义．

3．圆的方程有哪几种形式？指出这些方程中系数的几何意义．

4．采用坐标法来研究几何图形(如点、直线、圆)的位置关系与度量关系是本章的重点．在将几何问题转化为代数问题并实施代数运算的过程中，我们采取两条途径来得出坐标之间的关系：一种是直接利用几何定理得出；另一种是通过向量及其运算而得到．思考：(1) 如何判定两条直线的位置关系？如何求两条直线的交点坐标？你能推导点到直线的距离公式吗？(2) 如何判断直线与圆、圆与圆的位置关系？

5．试结合实例，归纳总结运用代数方法解决平面几何问题的方法与步骤，体会蕴含在解析几何中的数形结合思想．

复习题二

学而时习之

1. 直线 l 过点 $M(-1, 0)$，且与以 $P(2, -3)$，$Q(1, 2)$ 为端点的线段相交，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

2. 已知直线 l 过点 $P(2, 1)$，且直线 l 的斜率为直线 $x-4y+3=0$ 的斜率的 2 倍，求直线 l 的方程.

3. 已知定点 $A(0, 1)$，点 B 在直线 $x+y=0$ 上运动，当线段 AB 最短时，求点 B 的坐标.

4. 直线 l 与两坐标轴在第一象限所围成的三角形面积为 2，两截距之差为 3，求直线 l 的方程.

5. 已知直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值.

6. 已知两直线 l_1：$ax-2y+1=0$ 与 l_2：$x-ay-2=0$.

(1) 当 $l_1 /\!/ l_2$ 时，求 a 的值并求这两条直线之间的距离.

(2) 试判断 l_1 与 l_2 能否垂直. 若能，求 a 的值；若不能，试说明理由.

7. 写出满足下列条件的圆的方程：

(1) 圆心为点 $(1, 1)$，且过原点；

(2) 圆心在 y 轴上，半径为 3，且与 x 轴相切；

(3) 圆心在 x 轴上，半径为 3，且与圆 $x^2+y^2=1$ 外切；

(4) 圆心在直线 $y=x$ 上，且过点 $(1, 0)$，半径为 5.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上，求圆 C 的方程.

9. 已知点 P 为圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的动点，求点 P 到直线 $3x+4y+8=0$ 的距离的最小值.

10. 已知圆心在直线 $x+y-1=0$ 上，$A(-1, 4)$ 和 $B(1, 2)$ 是圆上的两点.

(1) 求该圆的方程；

(2) 若点 P 为该圆上一动点，O 为坐标原点，试求直线 OP 斜率的取值范围.

11. 求过点 $A(0, 1)$ 且被圆 C：$(x-4)^2+y^2=25$ 所截的弦长为 6 的直线的方程.

12. 已知圆 C_1：$x^2+y^2-4x+6y=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-6x=0$ 交于 A，B 两点，求直线 AB 的方程.

13. 证明：三角形两边中点所连线段平行于第三边且其长度等于第三边长度的一半.

14. 已知两定点 $P_1(-1, 0)$ 和 $P_2(3, 0)$，求到点 P_1 和 P_2 的距离的平方和是 16 的点的轨迹方程.

15. 由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，$\angle APB=\frac{\pi}{3}$，求动点 P 的轨迹方程.

温故而知新

16. 过点 P 的直线 l 绕点 P 按逆时针方向旋转角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 后所得直线为 $y=x-2$，若继续绕点 P 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 后得到直线 $y=-2x+1$，求直线 l 的方程.

17. 已知等腰直角 $\triangle ABC$(B 为直角顶点)的两个顶点分别为 $A(0，4)$，$C(6，0)$，求三边所在直线的方程.

18. 已知点 $A(1，2)$和 $B(-3，-2)$，点 C 在直线 AB 上，且 $|AC|=2|CB|$，求过点 C 且与直线 AB 垂直的直线的方程.

19. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线. 若 l_1 与 l_2 的交点为$(1，3)$，求 l_1 与 l_2 的夹角的正切值.

20. 已知圆 C_1：$x^2+y^2-2ax-2y+a^2-15=0$，圆 C_2：$x^2+y^2-4ax-2y+4a^2=0(a>0)$. 试求 a 为何值时，两圆 C_1，C_2：(1) 相切；(2) 相交；(3) 外离；(4) 内含.

21. 已知过原点的动直线 l 与圆 C_1：$x^2+y^2-6x+5=0$ 相交于不同的两点 A，B.

(1) 求圆 C_1 的圆心坐标.

(2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程.

(3) 是否存在实数 k，使得直线 L：$y=k(x-4)$与曲线 C 只有一个交点？若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，试说明理由.

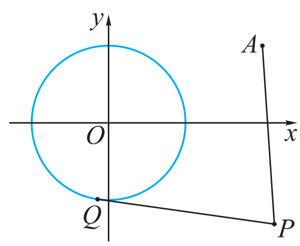
上下而求索

22. 如图，已知圆 O：$x^2+y^2=1$ 和定点 $A(2，1)$，由圆 O 外一点 $P(a，b)$向圆 O 引切线 PQ，切点为 Q，且有 $|PQ|=|PA|$.

(1) 求 a，b 之间的关系；

(2) 求 $|PQ|$ 的最小值；

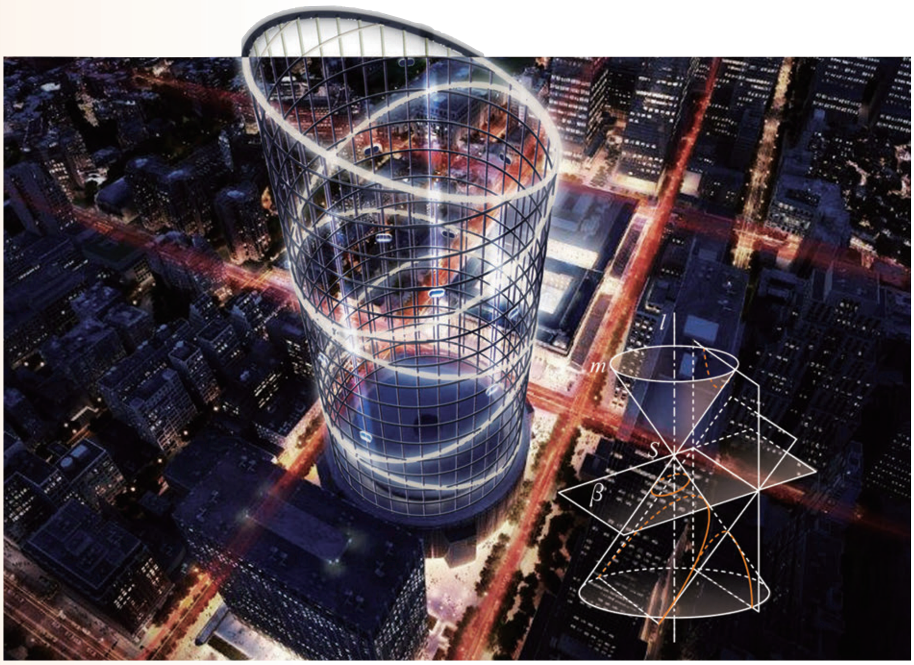
(3) 以 P 为圆心作圆，使它与圆 O 有公共点，试求出其中半径最小的圆的方程.



(第 22 题)

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 和圆 C_2：$(x-a)^2+y^2=r^2(a\neq 0，r>0)$. 过平面上一点 P 有无穷多对直线 l_1 和 l_2，它们分别与圆 C_1 和 C_2 相交，且直线 l_1 和 l_2 相互垂直，l_1 被圆 C_1 截得的弦长与 l_2 被圆 C_2 截得的弦长之比为常数 $\frac{1}{r}$. 针对 $r=1$ 与 $r\neq 1$ 两种情况，分别求所有满足条件的点 P 的坐标.

第3章 圆锥曲线与方程



早在公元前 4 世纪，古希腊数学家发现用一定角度的平面去截圆锥，可以得到不同的曲线，如圆、椭圆、抛物线、双曲线等，古希腊先贤将它们统称为圆锥曲线.

事实上，天地之间，圆锥曲线无处不在. 德国天文学家开普勒发现天体运行轨道是椭圆，意大利物理学家伽利略得到抛掷物体的轨迹是抛物线，而法国科学家迈多尔日发展了圆锥曲线在光学中的应用. 随着解析几何的创立，人们用坐标法和方程来研究圆锥曲线，使得圆锥曲线在理论上更加完善，在实践中得到了更加充分的应用.

本章我们将从数学实验入手，介绍椭圆、双曲线、抛物线的概念，通过建立适当的直角坐标系推导它们的标准方程，并利用标准方程来研究这些曲线的简单几何性质. 这将有助于我们提高数学思维的能力以及解决问题的能力.

数学实验

生活中的圆锥曲线

实验 1

（1）如图 1，将一个圆台形（上底半径大，下底半径小）玻璃杯装一些水放置在水平桌面上，从杯子的正上方观察水面，这是什么形状？

（2）如图 2，将玻璃杯逐渐倾斜，观察水面变成什么形状.

图 1

图 2

实验 2

（1）如图 3，将一个圆台形纸杯泡在水中，使水面与杯外壁的曲面相交，观察相交所成的曲线的形状.

（2）如图 4，改变纸杯与水面的倾斜程度，观察所得曲线形状的变化情况.

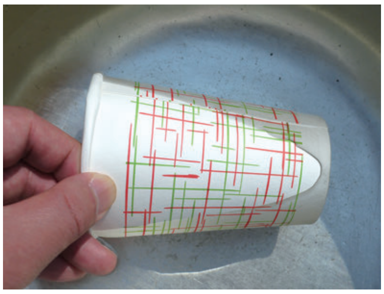


图 3

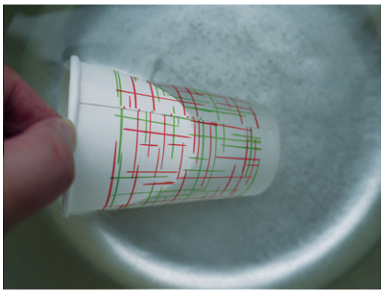


图 4

实验 3

如图 5，将手电筒光束照到墙面上，观察照亮的区域边沿的形状. 当手电筒光束正对墙面时，照亮的区域边沿是圆. 让手电筒光束逐渐倾斜，观察照亮的区域边沿形状的变化.

图 5

实验 4

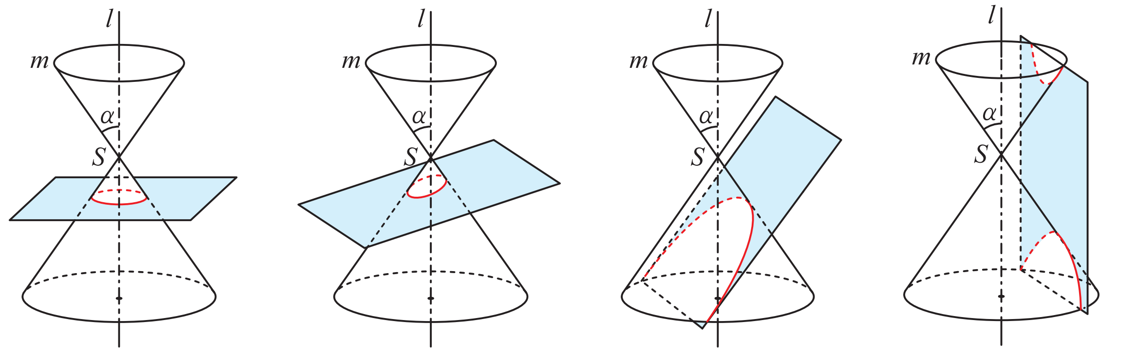
如图 6，开启墙上的壁灯，灯泡发出的光从灯罩上边和下边的圆口照射出来，在墙上照亮两块区域，观察区域边沿的曲线形状.

图 6

从上述实验中，我们可以观察到一些曲线. 事实上，早期人类的生活实践也不乏实例. 例如，人们在锯树或竹子的过程中，锯得正则得圆，锯得歪则得椭圆. 对于一般人，此事常见，不足为奇而未加深究，但它引起了古希腊一些几何学家的关注. 树干或竹子可以看作圆柱体，用平面来截圆柱体就可以得到圆或椭圆. 研究者的思考步伐并没有停止，严格来说，树干应看作底粗顶细的圆锥，那么用平面来截圆锥又能得到哪些曲线呢？他们将圆柱截面的几何证法推广到圆锥面，得到了令人喜出望外的结论：

如图 7，设直线 l，m 相交于点 S，夹角为锐角 α. 直线 m 绕直线 l 旋转一周形成圆锥面，则 S 是圆锥面的顶点，l 是圆锥面的轴，圆锥面上过点 S 的任意一条直线都是圆锥面的母线.

用一个不经过点 S 的平面去截这个圆锥面，随着平面与轴所成角 θ 的不同，截线的形状也随之变化.



当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，平面与轴垂直，截线是圆　　当 $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$，截线是椭圆　　当 $\theta=\alpha$，截线是抛物线　　当 $0\leqslant\theta<\alpha$，截线是双曲线（上下两支）

图 7

用平面去截圆锥面，可以得到圆、椭圆、抛物线、双曲线，古希腊几何学家将这类曲线统称为圆锥曲线．上述结论为我们理解实验结果提供了思路．

实验 1 中将圆台形玻璃杯水平放置时，玻璃杯的内侧面是圆锥面的一部分．在重力作用下平衡的水面是平面．因此，茶杯中的水面边沿实际上是圆锥面与平面相交得到的曲线，此时，我们可以观察到水面边沿是一个圆．将茶杯倾斜，实际上就是让圆锥面与平面以不同的角度相交，得到“拉长程度”不同的椭圆．

实验 2 中的纸杯是圆台形，其外侧面也是圆锥面的一部分．将纸杯泡在水中，使水面与杯外壁的曲面相交，这实际上是以水平面去截圆锥面，我们可以观察到相交得到的曲线不是封闭曲线，而是抛物线或双曲线．

实验 3 和实验 4 中，手电筒光束的边沿是圆锥面，壁灯灯泡从灯罩口射出的光束的边沿也是圆锥面，墙面是平面，因此，光束在墙上照亮区域的边沿仍是圆锥面与平面的交线．

实验 1～4 的形式和内容尽管不同，但实质上却是相同的：都是观察圆锥面与平面的交线．

3.1 椭　圆

3.1.1 椭圆的标准方程

实验　如图 3.1-1，取一条定长的细绳，把它的两端固定在图板上的两点 F_1 和 F_2 上(绳子长度大于 $|F_1F_2|$)，然后用铅笔尖将细绳绷紧，并使铅笔尖在图板上慢慢移动一周，观察所画出的图形.

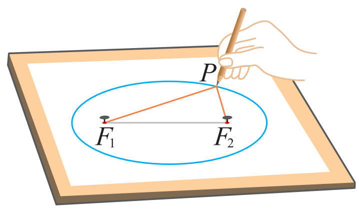


图 3.1-1

从实验中可以看到，铅笔尖(即点 P)在移动过程中，到两个定点 F_1 和 F_2 的距离之和始终保持不变(等于这条绳子的长度). 我们根据这个几何性质来定义铅笔尖画出的曲线.

平面上到两个定点 F_1，F_2 的距离之和为常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作**椭圆**. 这两个定点 F_1，F_2 叫作椭圆的**焦点**，两个焦点之间的距离 $|F_1F_2|$ 叫作**焦距**.

实验画出的图形就是椭圆. 下面我们根据椭圆的几何特征，选择适当的直角坐标系来求椭圆的方程.

如图 3.1-2，取过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

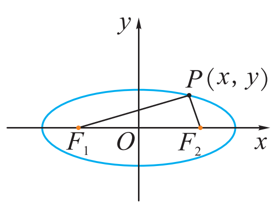


图 3.1-2

设点 $P(x,\ y)$ 是椭圆上的任意一点，椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，椭圆上的点与两个定点 F_1，F_2 的距离之和为 $2a(a>0)$，则 F_1，F_2 的坐标分别为 $(-c,\ 0)$，$(c,\ 0)$.

根据椭圆的定义，点 $P(x, y)$在椭圆上的充要条件为

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

即
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

为化简这个方程，将左边的一个根式移到右边，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

将这个方程两边平方，整理得

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

上式两边再平方，整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \quad ①$$

这就是椭圆的方程.

由椭圆方程可以看出这是一个二元二次方程.

椭圆方程①还可以写成更简单的形式.

由椭圆的定义知 $2a>2c$，即 $a>c$，所以 $a^2-c^2>0$. 设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，则

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

上式两边同时除以 a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0). \quad ②$$

这称为**椭圆的标准方程**，它所表示的椭圆焦点在 x 轴上.

由②式得，当 $y=0$ 时，$x=\pm a$；当 $x=0$ 时，$y=\pm b$. 这说明椭圆与 x 轴的交点为$(-a, 0)$及$(a, 0)$，与 y 轴的交点为$(0, -b)$及$(0, b)$.

类似地，如图 3.1-3，若椭圆的两个焦点在 y 轴上且关于原点对称，设焦点坐标为 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，其中 $c>0$. 若椭圆上任意一点到两焦点的距离之和为 $2a(a>c)$，则点 $P(x, y)$在该椭圆上的充要条件是$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即

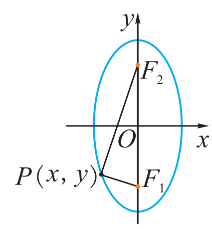


图 3.1-3

$$\sqrt{x^2+(y+c)^2}+\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a.$$

仿照焦点在 x 轴上的情形可将这个方程化简为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0). \quad ③$$

这也是椭圆的标准方程，它表示的椭圆焦点在 y 轴上，并且 $a^2-c^2=b^2$.

想一想，已知一个椭圆的标准方程，如何判定焦点在 x 轴上还是在 y 轴上?

例 1 求下列椭圆的焦点坐标，以及椭圆上任一点到两个焦点的距离之和：

(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；　　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

解 (1) 已知方程是椭圆的标准方程，由 $4>1$，可知这个椭圆的焦点在 x 轴上，且 $a^2=4$，$b^2=1$，所以 $c^2=a^2-b^2=3$，$c=\sqrt{3}$.

因此，椭圆的焦点坐标为$(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 $2a=4$.

（2）已知方程是椭圆的标准方程，由 $5>4$，可知这个椭圆的焦点在 y 轴上，且 $a^2=5$，$b^2=4$，所以 $c^2=a^2-b^2=1$，$c=1$.

因此，椭圆的焦点坐标为$(0,\ -1)$，$(0,\ 1)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 $2a=2\sqrt{5}$.

例 2 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）焦点坐标为$(-3,\ 0)$和$(3,\ 0)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 10；

（2）焦点坐标为$(0,\ -2)$和$(0,\ 2)$，且经过点$(3,\ 2)$.

解 （1）由于椭圆的焦点在 x 轴上，故可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

由椭圆的定义知 $2a=10$，所以 $a=5$.

又因为 $c=3$，所以 $b^2=a^2-c^2=25-9=16$.

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

（2）由于椭圆的焦点在 y 轴上，故可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

已知焦点坐标及椭圆上一点$(3,\ 2)$，由椭圆的定义可知

$$2a=\sqrt{(3-0)^2+[2-(-2)]^2}+\sqrt{(3-0)^2+(2-2)^2}=5+3=8,$$

因此 $a=4$.

又因为 $c=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=16-4=12$.

因此，所求椭圆的标准方程为

$$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1.$$

练习

1. 求下列椭圆的焦点坐标，以及椭圆上任一点到两个焦点的距离之和：

（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　　（2）$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$；　　（3）$4x^2+3y^2=4$.

2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）焦点坐标为$(-5,\ 0)$和$(5,\ 0)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 26；

（2）焦点坐标为$(0,\ -3)$和$(0,\ 3)$，且椭圆经过点$(8,\ 3)$.

3.1.2 椭圆的简单几何性质

实验 选取几组不同的满足 $a>b>0$ 的 a，b 值，描点作图或利用计算机作图软件作出方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的图象，观察图象并思考下列问题：

1. 范围：图象分布范围是否有限？如果有限，最左、最右、最低、最高分别到什么位置？找出最左、最右、最低、最高的点.

2. 对称性：图象是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心. 图象是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴.

3. 通过观察，图象还有没有其他的性质？如果有，试作出说明.

4. 试根据方程解释你所观察到的现象.

下面，我们通过对椭圆标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的研究，来认识椭圆的一些简单几何性质.

一 范围

由椭圆的标准方程可知，椭圆上任意一点的坐标$(x，y)$都适合不等式

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1，\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1，$$

即 $$x^2\leqslant a^2，y^2\leqslant b^2，$$

所以 $$-a\leqslant x\leqslant a，-b\leqslant y\leqslant b.$$

这说明，椭圆位于四条直线 $x=-a$，$x=a$，$y=-b$，$y=b$ 所围成的矩形内(如图 3.1－4).

同理可知，椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 位于四条直线 $x=\pm b$，$y=\pm a$ 所围成的矩形内.

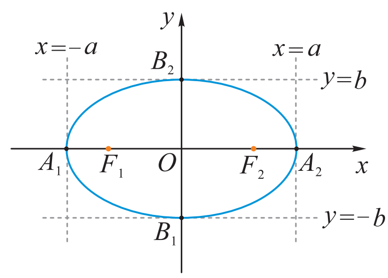


图 3.1－4

二 对称性

1. 对称轴

平面上任一点$(x，y)$关于 x 轴的对称点是$(x，-y)$. 在椭圆的标准方程中，将$(x，y)$换成$(x，-y)$，方程不变，这说明当点 $P(x，y)$在椭圆上时，它关于 x 轴的对称点 $P_1(x，-y)$也在椭圆上，因此椭圆关于 x 轴对称(如图 3.1－5).

平面上任一点$(x，y)$关于 y 轴的对称点是$(-x，y)$. 在椭圆的标准方程中，将$(x，y)$换成$(-x，y)$，方程不变，这说明当点 $P(x，y)$在椭圆上时，它关于 y 轴的对称点 $P_2(-x，y)$也在椭圆上，因此椭圆关于 y 轴对称(如图 3.1－5).

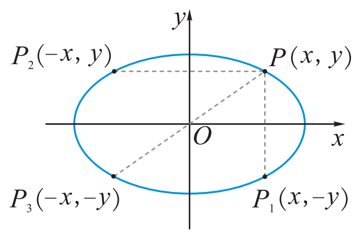


图 3.1－5

我们知道，椭圆的标准方程是以两个焦点所连线段的中点为原点、以两焦点连线为 x 轴或 y 轴得到的．因此，平面上任意一个椭圆都是轴对称图形，两焦点连线是它的**对称轴**，两焦点所连线段的垂直平分线也是它的**对称轴**.

2. 对称中心

平面上任一点(x, y)关于原点的对称点是$(-x, -y)$.

在椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，将$(x, y)$换成$(-x, -y)$，方程不变，这说明当点 $P(x, y)$在椭圆上时，它关于原点的对称点 $P_3(-x, -y)$也在椭圆上(如图 3.1－5)．由此可知，椭圆关于原点中心对称，坐标原点叫作椭圆的**对称中心**.

对于平面上任意一个椭圆，它的两个焦点所连线段的中点是椭圆的对称中心，简称为**椭圆的中心**.

同样地，我们可以对椭圆方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$进行类似的讨论.

三　顶点

椭圆的两条对称轴与椭圆的交点称为椭圆的**顶点**．在椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$；令 $x=0$，得 $y=\pm b$．因此 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$，$B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$是椭圆的四个顶点，它们分别是椭圆最左、最右、最低、最高的点(如图 3.1－4).

线段 A_1A_2，B_1B_2分别叫作椭圆的**长轴**和**短轴**，它们的长分别为 $2a$ 和 $2b$．椭圆的中心 O 分别将长轴、短轴等分，a 和 b 分别叫作**长半轴长**和**短半轴长**.

四　离心率

回顾一下我们用细绳画椭圆的过程，若细绳的长度不变，改变焦点 F_1，F_2的位置，椭圆的形状会发生怎样的变化?

当$|F_1F_2|$变小时，$\frac{c}{a}$的值逐渐变小，这时由 $b^2=a^2-c^2$ 知短轴长 $2b$ 逐渐增大，

因此椭圆会越来越圆，反之椭圆会越来越扁，这说明$\frac{c}{a}$反映了椭圆的扁平程度．我们把半焦距与长半轴长的比 $e=\frac{c}{a}$ 叫作**椭圆的离心率**.

当 $c=0$，即 $a=b$ 时，椭圆的两个焦点重合，此时椭圆变为半径为 a 的圆，它的方程为 $x^2+y^2=a^2$.

对椭圆而言，因为 $a>c>0$，所以 $0<e<1$.

例 3 求椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的长轴长、短轴长、焦距、顶点坐标、焦点坐标和离心率.

解 由椭圆的标准方程$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$及 $a>b>0$ 可知

$$a=5，b=3.$$

所以 $c^2=a^2-b^2=25-9=16$，即 $c=4$.

于是，椭圆的长轴长为 10，短轴长为 6，焦距为 8；顶点坐标为 $A_1(-5,0)$，$A_2(5,0)$，$B_1(0,-3)$，$B_2(0,3)$；焦点坐标为 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$；离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

例 4 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴长为 18，离心率为$\frac{1}{3}$；

(2) 经过点 $P(2,2)$，$Q(-3,-1)$，焦点在 x 轴上.

解 (1) 因为 $2a=18$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，

所以 $a=9$，$c=3$.

于是 $b^2=a^2-c^2=81-9=72$.

椭圆的焦点可能在 x 轴上，也可能在 y 轴上，因此，所求的椭圆标准方程为

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{72}=1 \text{ 或 } \frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{72}=1.$$

(2) 设椭圆方程具有标准形式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 将 P，Q 两点的坐标代入得

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1, \qquad ①$$

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad ②$$

将$\frac{1}{a^2}$，$\frac{1}{b^2}$看作未知数，则上述两个式子组成二元一次方程组.

②×4−①得 $\frac{32}{a^2}=3$，即 $a^2=\frac{32}{3}$.

$\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}$，即 $b^2=\frac{32}{5}$.

因此，所求的椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}=1$.

前面我们将直线与圆的方程联立解方程组，通过求解方程组进而确定它们是相交、相切还是相离，即讨论它们的公共点情况．这种研究方法，对研究直线与椭圆的位置关系完全适用.

例 5 对不同的实数 m，讨论直线 l：$y=x+m$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的公共点的个数.

分析 判断直线与椭圆的公共点的个数，即判断由直线方程与椭圆方程组成的方程组的实数解的个数.

解 由

$$\begin{cases} y=x+m, & ① \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, & ② \end{cases}$$

消去 y 并整理得

$$5x^2+8mx+4m^2-4=0. \qquad ③$$

此方程的实数解的个数由它的判别式 Δ 决定，

$$\Delta=(8m)^2-4\times5\times(4m^2-4)=16(5-m^2).$$

当 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$ 时，$\Delta>0$，方程③有两个不相等的实数根，代入方程①可得到两个不同的公共点坐标．此时直线 l 与椭圆有两个公共点，即它们相交.

当 $m=-\sqrt{5}$ 或 $m=\sqrt{5}$ 时，$\Delta=0$，方程③有两个相等的实数根，代入方程①得到一个公共点坐标．此时直线 l 与椭圆有一个公共点．观察图象可知，它们在这一点相切.

当 $m<-\sqrt{5}$ 或 $m>\sqrt{5}$ 时，$\Delta<0$，方程③没有实数根．此时直线 l 与椭圆没有公共点，即它们相离.

综上，可得：

当 $-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$ 时，直线 l 与椭圆有两个公共点；

当 $m=-\sqrt{5}$ 或 $m=\sqrt{5}$ 时，直线 l 与椭圆有一个公共点；

当 $m<-\sqrt{5}$ 或 $m>\sqrt{5}$ 时，直线 l 与椭圆没有公共点.

直线 l 与椭圆 C 的位置关系如图 3.1－6 所示.

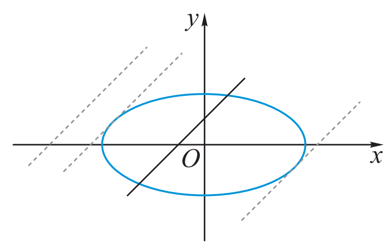


图 3.1－6

练 习

1. 求下列各椭圆的长轴长、短轴长、焦距、顶点坐标、焦点坐标和离心率：

(1) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{9}=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$；

(3) $4x^2+9y^2=1$.

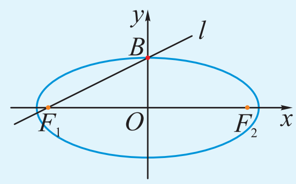
2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 长轴长为 6，离心率为 $\dfrac{2}{3}$；

(2) 经过点 $P(3，0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦点在 x 轴上；

(3) x 轴上的一个焦点与短轴两个端点的连线互相垂直，且焦距为 6.

3. 如图，直线 l：$x-2y+2=0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B，求该椭圆的离心率.



（第 3 题）

4. 试判断直线 $y=mx+1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的公共点的个数，并说明理由.

习题 3.1

学而时习之

1. 判断下列方程是否表示椭圆. 若是，指出该椭圆的焦点坐标，以及椭圆上任一点到两个焦点的距离之和：

(1) $4x^2+y^2=1$；　　(2) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{16}=2$；

(3) $2x^2+3y^2=6$；　　(4) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

2. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

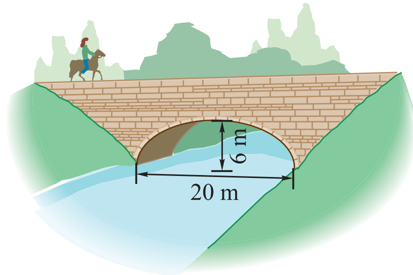
(1) $a+c=4$，$a-c=2$；

(2) 焦点坐标为 $(0，-4)$，$(0，4)$，椭圆上任一点到两个焦点的距离之和为 10；

(3) 焦点在 x 轴上，$a=4$，且经过点 $A(2，\sqrt{3})$；

(4) $c=4$，且经过点 $P(0，2\sqrt{6})$.

3. 如图，椭圆的上半部分拱形用于支撑横跨 20 m 水面宽的桥，拱的中心距河面 6 m. 试写出椭圆的一个方程.



(第 3 题)

4. 求下列各椭圆的长轴长、短轴长、焦距、顶点坐标、焦点坐标和离心率，并画出它们的草图：

(1) $x^2+9y^2=36$；　　(2) $9x^2+5y^2=45$.

5. 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 一个焦点为 $F_1(-2\sqrt{3},\ 0)$，长轴长是短轴长的 2 倍；

(2) 经过点 $P(2,\ 2\sqrt{2})$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，焦点在 x 轴上；

(3) 经过两点 $A\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$，$B(2,\ 0)$.

6. 已知椭圆的中心在原点，左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，且经过点 $(-2,\ 0)$，过左焦点 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，求 $\triangle ABF_2$ 的周长.

7. 已知直线 l：$y=2x+m$，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 试问当 m 取何值时，直线 l 与椭圆 C：(1) 相交；(2) 相切；(3) 相离？

温故而知新

8. 已知椭圆的中心在原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，$P(3,\ 4)$ 为椭圆上一点，若 $PF_1\perp PF_2$，求该椭圆的方程.

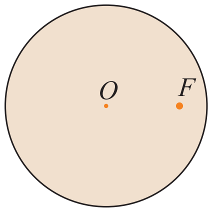
9. 过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P，F_2 为右焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，求该椭圆的离心率.

10. 已知斜率为 1 的直线 l 过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点 F，且交椭圆于 A，B 两点，求弦 AB 的长.

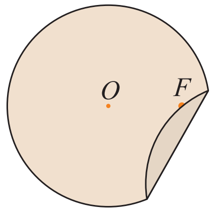
11. 已知椭圆的两焦点为 $F_1(-1,\ 0)$，$F_2(1,\ 0)$，P 为椭圆上一点，且 $2|F_1F_2|=|PF_1|+|PF_2|$，$\angle PF_1F_2=120°$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

12. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M. 证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

13. （数学探究活动）准备一张圆形纸片(如图(1))，其中 O 表示圆心，F 表示圆内除点 O 以外的任意一点．将纸片翻折，使翻折上去的圆弧经过点 F(如图(2))，将折痕用笔上色．继续上述过程，绕圆心一周，你观察到了什么？想一想这是为什么．



(1)



(2)

(第 13 题)

多知道一点

圆柱体截面问题

在前面的数学实验中，我们用平面去截圆锥时，可以得到四种不同的截面曲线．事实上，我们也可以用平面来截圆柱，观察分析其截面曲线的形状．很显然，当平面与圆柱的轴垂直时，可以得到圆．而用平面斜截圆柱时，截面曲线从直观上看是椭圆(如图 1)．历史上，法国人 Dandelin 采用一个巧妙的方法证明了这一结论．

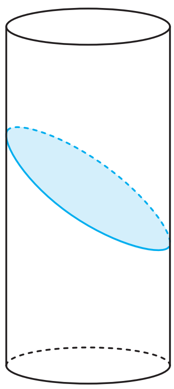


图 1

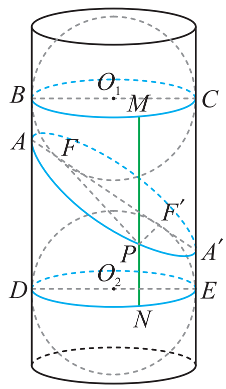


图 2

如图 2，将两个同样大小的球嵌入圆柱内，使它们分别位于斜截面的上方和下方，并且与截面和圆柱侧面均相切，两球面与圆柱侧面分别相切于以 BC，DE 为直径且平行于圆柱底面的大圆 O_1 和 O_2，两球面与斜截面分别相切于点 F 和 F'，斜截面与 BD，CE 分别交于点 A 和 A'，P 为所得截面边缘上一点．设圆柱过点 P 的母线与圆 O_1 和 O_2 分别交于点 M 和 N，则 PM 和 PN 分别是两球面的一条切线．

由于 PM 和 PF 是同一个球面的切线，故 $PM=PF$，同理 $PN=PF'$，于是有 $PF+PF'=PM+PN=MN$ 为定值，即截面曲线上任意一点 P 到 F 和 F' 的距离之和为定值，由椭圆的定义可知，这时的截面曲线是椭圆，而两球与斜截面的切点是椭圆的焦点．

3.2 双曲线

3.2.1 双曲线的标准方程

我们知道，平面上到两个定点 F_1，F_2 的距离之和为常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹是椭圆．那么，平面上到两个定点 F_1，F_2 的距离之差为常数的点的轨迹又是什么曲线呢？

先通过实验将这样的曲线画出来，观察它的形状．

实验　如图 3.2－1 所示，把一条拉开一部分的拉链分成一长一短两条边，将拉开的两头固定在 F_1 和 F_2 处(拉链两边的长度之差小于 F_1，F_2 间的距离)，将铅笔尖放在拉链张开处 P 点，慢慢拉开拉链，使铅笔尖慢慢移动，画出图形的一部分；再把拉链的两边交换位置分别固定在 F_1 和 F_2 处，用同样的方法可以画出图形的另一部分．

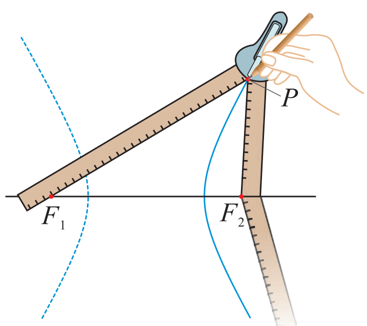


图 3.2－1

从画图过程可以发现，F_1，F_2 两点的位置保持不变，动点 P 到两定点 F_1 和 F_2 的距离之差始终保持不变，等于拉链原长短边的长度之差．

平面上到两个定点 F_1，F_2 的距离之差的绝对值为正常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作**双曲线**．这两个定点 F_1，F_2 叫作双曲线的**焦点**，两个焦点之间的距离 $|F_1F_2|$ 叫作双曲线的**焦距**．

通过实验画出的图形就是双曲线，它由两条曲线组成，其中每一条叫作双曲线的一支．双曲线由这两支共同组成．

下面，我们根据双曲线的几何特征，选择适当的坐标系，来建立双曲线的方程．

如图 3.2－2，以过焦点 F_1，F_2的直线为 x 轴，线段 F_1F_2的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系．设点 $P(x, y)$为双曲线上任意一点，它到两焦点 F_1和 F_2的距离之差的绝对值是定长 $2a(a>0)$．设双曲线的焦距是 $2c(c>0)$，则 F_1，F_2的坐标分别为$(-c, 0)$，$(c, 0)$．

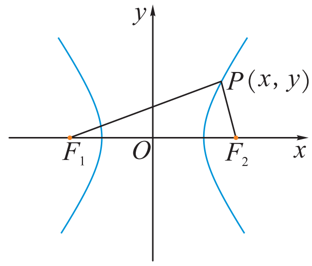


图 3.2－2

根据双曲线的定义，点 $P(x, y)$在双曲线上的充要条件是

$$|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a,$$

即

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \quad ①$$

类比建立椭圆标准方程的化简过程，化简①，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \quad ②$$

由双曲线的定义可知，$2c>2a$，即 $c>a$，所以 $c^2-a^2>0$．设 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，则②式变为

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

上式两边同时除以 a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0). \quad ③$$

方程③是双曲线的方程，我们将其称为**双曲线的标准方程**．它表示的双曲线的焦点在 x 轴上，坐标分别为 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，而双曲线上的点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 $2a$．

如果双曲线的焦点在 y 轴上，坐标分别为 $F_1(0, -c)$，$F_2(0, c)$，双曲线上任意一点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 $2a(a<c)$，如图 3.2－3 所示，则双曲线的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0). \quad ④$$

> ？ 已知双曲线的标准方程，如何判定焦点在 x 轴上还是在 y 轴上？

这也是双曲线的标准方程．

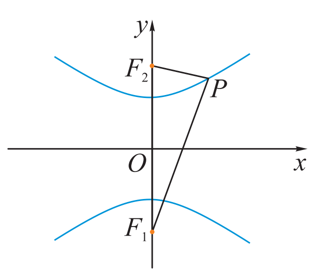


图 3.2－3

例 1 已知双曲线两个焦点分别为 $F_1(-4, 0)$，$F_2(4, 0)$，双曲线上任一点到两个焦点的距离之差的绝对值等于 6，求该双曲线的标准方程.

解 由于双曲线的焦点在 x 轴上，故可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0).$$

由双曲线的定义知 $2a=6$，所以 $a=3$.

又因为 $c=4$，所以 $b^2=c^2-a^2=16-9=7$.

因此，所求双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$$

例 2 已知双曲线两个焦点分别为 $F_1(0, -2)$，$F_2(0, 2)$，并且双曲线经过点 $P(3, -2)$，求该双曲线的标准方程.

解 由于双曲线的焦点在 y 轴上，故可设它的标准方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0).$$

已知焦点 F_1，F_2 及双曲线上一点 P，由双曲线的定义可知

$$2a=|PF_2|-|PF_1|=\sqrt{(3-0)^2+(-2-2)^2}-3=5-3=2,$$

因此 $a=1$.

又因为 $c=2$，所以 $b^2=c^2-a^2=4-1=3$.

因此，所求双曲线的标准方程为

$$y^2-\frac{x^2}{3}=1.$$

例 3 已知方程 $\frac{x^2}{4+a}+\frac{y^2}{5+a}=1$.

(1) 若方程表示双曲线，求 a 的取值范围；

(2) 试说明(1)中的双曲线有共同的焦点.

解 (1) 方程表示双曲线，则

$$(4+a)(5+a)<0.$$

解得

$$-5<a<-4.$$

因此，当 $-5<a<-4$ 时，方程表示双曲线，且原方程可写为 $\frac{y^2}{5+a}-\frac{x^2}{-4-a}=1$.

(2) 由(1)可知，双曲线的焦点在 y 轴上，且 $c^2=5+a+(-4-a)=1$.

所以，方程表示的双曲线的焦点坐标为 $(0, 1)$，$(0, -1)$，显然与方程中的 a 无关，因此(1)中的双曲线有共同的焦点.

练习

1. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 两焦点坐标为$(-5,0)$，$(5,0)$，且$a=4$；

(2) 两焦点坐标为$(0,-6)$，$(0,6)$，且经过点$(2,-5)$；

(3) 焦点在y轴上，且经过点$(3,-4\sqrt{2})$和$\left(\frac{9}{4},5\right)$.

2. 已知方程$\frac{x^2}{2+m}-\frac{y^2}{m+1}=1$表示双曲线，求$m$的取值范围.

3.2.2 双曲线的简单几何性质

实验 选取几组不同的满足$a>0$，$b>0$的a，b值，描点作图或利用计算机作图软件作出双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的图象，观察图象并思考下列问题：

1. 范围：图象是否分布在一个有限的范围之内，或者在某一个范围之外？

2. 对称性：图象是不是中心对称图形？如果是，找出对称中心. 图象是不是轴对称图形？如果是，找出对称轴.

3. 通过观察，你能否发现图象还有其他的性质？

下面，我们通过对双曲线标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的研究，来认识双曲线的一些简单几何性质.

一 范围

由双曲线的标准方程可知，双曲线上任意一点的坐标(x,y)，都适合不等式

$$\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0,\ \frac{x^2}{a^2}\geqslant 1,$$

即

$$x^2\geqslant a^2,\ y^2\geqslant 0,$$

所以 $x\leqslant -a$或$x\geqslant a$，$y\in\mathbf{R}$.

这说明，双曲线的两支分别位于直线$x=-a$的左侧与直线$x=a$的右侧，向左右两方无限延伸.

事实上，我们还可以更精确地描述双曲线分布的范围. 双曲线上任意一点的坐标(x,y)满足条件

$$|y|=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}<\frac{b\sqrt{x^2}}{a}=\frac{b}{a}|x|.$$

当$x\geqslant a$时，$-\frac{b}{a}x<y<\frac{b}{a}x$；当$x\leqslant -a$时，$\frac{b}{a}x<y<-\frac{b}{a}x$.

总之，双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$处于两条相交直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 所围成的、包含 x 轴在内的那两个区域中，并且在直线 $x=-a$，$x=a$ 所围成的区域外侧，如图 3.2－4.

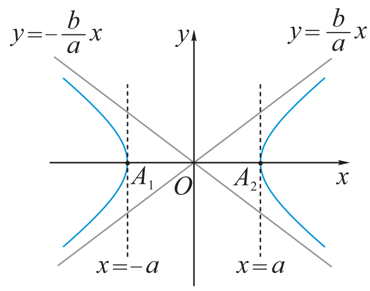


图 3.2－4

二 对称性

在双曲线的标准方程中，将(x, y)分别换成$(-x, -y)$，$(x, -y)$和$(-x, y)$，方程都不变，可见双曲线关于原点、x 轴和 y 轴都是对称的．因此，双曲线有两条对称轴，即 x 轴和 y 轴；有一个对称中心，即原点，双曲线的对称中心称为**双曲线的中心**.

三 顶点

在双曲线的标准方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，可见该双曲线与它的对称轴 x 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$，都称为双曲线的**顶点**.

令 $x=0$，得到 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数解，可见双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$与它的另一条对称轴 y 轴没有交点，但我们也将点 $B_1(0, -b)$与 $B_2(0, b)$画出来(如图 3.2－5).

线段 A_1A_2，B_1B_2分别叫作双曲线的**实轴**和**虚轴**，它们的长分别为 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别表示双曲线的**实半轴长**和**虚半轴长**.

四 渐近线

我们已经知道，双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$处于两条相交直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 所围成的、包含 x 轴在内的两个区域中．从图象上看，双曲线的两支向两端无限延伸，越来越接近于这两个区域的边界直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

下面，我们通过方程来研究双曲线接近这两条直线的程度.

在双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，将 x 当作已知数，解出

$$y=\frac{\pm b\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

我们先取双曲线在第一象限内的部分进行考察，并研究这一部分向右上方接近于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的程度. 为此，对同样的横坐标 x，计算出直线 $y=\frac{b}{a}x$ 与双曲线 $y=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$上的点的纵坐标之差：

$$\begin{aligned} d&=\frac{b}{a}x-\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a} \\ &=\frac{ba^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{ba}{x+\sqrt{x^2-a^2}}. \end{aligned}$$

随着 x 的无限增大，分母 $x+\sqrt{x^2-a^2}$无限增大，分子 ba 不变，可见 d 无限接近于 0，这说明双曲线在第一象限的部分在右上方无限接近直线 $y=\frac{b}{a}x$.

在其他象限内，也可以类似地证明. 总之，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在无限延伸的过程中无限接近两条直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 这两条直线称为**双曲线的渐近线**.

如图 3.2-5，过双曲线的两个顶点 $A_1(-a, 0)$，$A_2(a, 0)$分别作 y 轴的平行线 $x=\pm a$，经过 $B_1(0, -b)$，$B_2(0, b)$分别作 x 轴的平行线 $y=\pm b$，这四条直线围成一个矩形，矩形的两条对角线所在的直线就是双曲线的两条渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

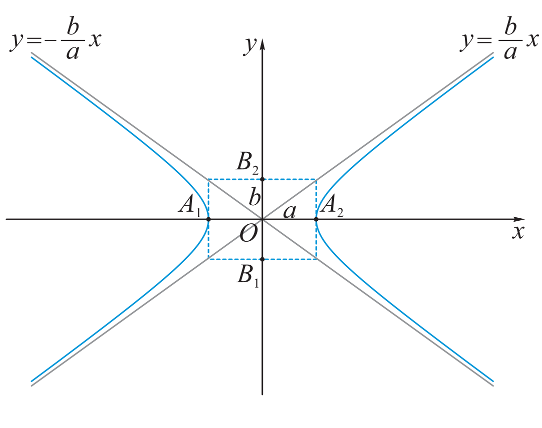


图 3.2-5

实轴与虚轴等长的双曲线叫作等轴双曲线. 等轴双曲线的渐近线方程是什么呢？

对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 和它的渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$，将方程中的 x 与 y 互换，就得到双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程 $x=\pm\frac{b}{a}y$，即 $y=\pm\frac{a}{b}x$.

五 离心率

与椭圆类似，双曲线的半焦距与实半轴长的比 $e=\frac{c}{a}$ 叫作**双曲线的离心率**. 因为 $c>a>0$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}>1$.

显然，e 越大，$\frac{b}{a}$ 越大，即渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大，说明双曲线的开口越大.

双曲线的离心率刻画了双曲线的什么几何特征?

例 4 求双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的实半轴长、虚半轴长、焦点坐标、渐近线方程和离心率，并画出该双曲线的草图.

解 由双曲线方程可得实半轴长 $a=3$，虚半轴长 $b=4$.

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$，焦点坐标为 $(-5，0)$，$(5，0)$.

从而，渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

为画出双曲线的草图，在坐标系中画出渐近线 $y=\pm\frac{4}{3}x$，顶点 $(\pm3，0)$. 算出双曲线在第一象限内一点的坐标，例如取 $x=5$，算出 $y=\frac{16}{3}\approx5.33$，可见点 $(5，\pm5.33)$ 在双曲线上. 将 y 轴右边已知的三点 $(5，5.33)$，$(3，0)$，$(5，-5.33)$ 依次连成光滑曲线并让它逐步接近渐近线，就画出了双曲线的一支. 由对称性可画出位于 y 轴左边的另一支，如图 3.2-6.

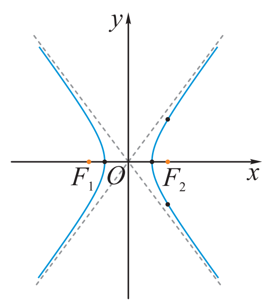


图 3.2-6

例 5 已知双曲线的中心在原点，焦点在 x 轴上，虚半轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为 3，求该双曲线的标准方程.

解 由于双曲线的焦点在 x 轴上，故可设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0).$$

根据已知有

$$\begin{cases} b=2\sqrt{2}, \\ \frac{c}{a}=3, \\ a^2+b^2=c^2. \end{cases}$$

解之得 $a^2=1，b^2=8$.

若去掉“焦点在 x 轴上”这个条件，所求双曲线的标准方程有几个?

故所求双曲线的标准方程为

$$x^2-\frac{y^2}{8}=1.$$

例 6 讨论直线 $y=x+b$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

分析 判断直线与双曲线的公共点的个数，即判断由它们的方程组成的方程组的解的个数.

解 由$\begin{cases}y=x+b\\x^2-y^2=1\end{cases}$消去 y 得

$$x^2-(x+b)^2=1.$$

整理得 $$2bx+b^2+1=0. \quad ①$$

如果 $b=0$，则方程①变为 $1=0$，无解．此时直线与双曲线无公共点．事实上，此时直线为 $y=x$，就是双曲线的渐近线，自然与双曲线无公共点.

你能通过作图来思考这条直线与双曲线的位置关系吗？

现在设 $b\neq0$，即直线平行于两条渐近线中的一条，方程①成为一元一次方程，有唯一解，原方程组有唯一一组解，此时直线与双曲线有一个公共点.

练习

1. 指出双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的范围、对称性、顶点、渐近线、实轴、虚轴及离心率.

2. 求下列双曲线的实轴长、虚轴长、焦点坐标、顶点坐标、渐近线方程和离心率.

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$； (2) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$；

(3) $8x^2-8y^2=32$； (4) $9y^2-x^2=81$.

3. 求适合下列条件的双曲线的标准方程，并画出草图.

(1) 一个焦点为$(0,\ 6)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$；

(2) 焦距为 20，离心率为$\frac{5}{4}$，顶点在 x 轴上；

(3) 与双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 共渐近线，且经过点$(-5,\ 2)$.

4. 讨论直线 $x=m$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的公共点的个数.

习题 3.2

学而时习之

1. 已知双曲线$\frac{y^2}{4}-x^2=1$的焦点为 F_1，F_2，点 P 在双曲线上，若$|PF_1|=6$，求$|PF_2|$的值.

2. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) $c=6$，焦点在 x 轴上，且过点 $A(-5, 2)$；

(2) $b=4$，一个焦点的坐标是$(-8, 0)$；

(3) 经过两点 $A(-7, -6\sqrt{2})$，$B(\sqrt{7}, -3)$.

3. 以下方程的图象是不是双曲线？如果是，求出它的焦点坐标、顶点坐标、离心率和渐近线方程，并画出它们的草图.

(1) $4x^2-5y^2=-20$；

(2) $4x^2-5y^2=1$；

(3) $4x^2-5y^2=0$.

从解答过程中，你能发现什么规律？

4. 求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 与椭圆$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$有公共焦点，且过点$(-2, \sqrt{10})$；

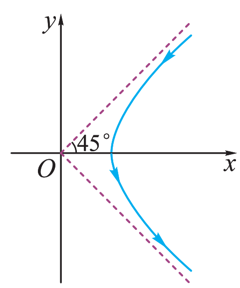
(2) 焦点在 y 轴上，焦距为 8，渐近线斜率为$\pm\frac{1}{3}$；

(3) 离心率 $e=\sqrt{2}$，且经过点 $P(-5, 3)$；

(4) 经过点$(4, 3)$，且一条渐近线的方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

5. 已知等轴双曲线经过点$(-3, 2)$，且对称轴都在坐标轴上，求它的标准方程.

6. 1911 年 5 月，欧内斯特·卢瑟福在《哲学》杂志上发表论文. 在这篇文章中，他描述了用 α 粒子轰击 0.000 04 cm 厚的金箔时拍摄到的运动情况. 在进行这个实验之前，卢瑟福希望 α 粒子能够通过金箔，就像子弹穿过雪一样. 事实上，有极小部分 α 粒子从金箔上反弹. 右图显示了卢瑟福实验中偏转的 α 粒子的路径(双曲线的一支).



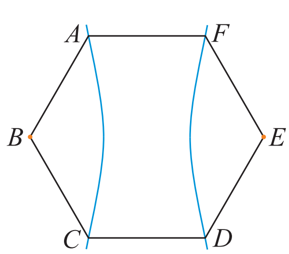
(第 6 题)

(1) 结合图象，求出该双曲线的渐近线方程.

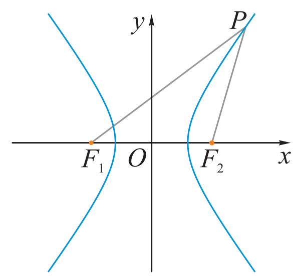
（2）如果偏转的 α 粒子路径的顶点距双曲线的中心 10 cm，试求出该路径所在的双曲线方程.

7. 已知点 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，动点 P 满足 $|PF_2|-|PF_1|=2$，当点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}$ 时，求点 P 到坐标原点的距离.

8. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$，双曲线以 B，E 为焦点，且经过 A，C，D，F 四点，求该双曲线的离心率.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，双曲线 C：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 的右支上一点，且 $|PF_2|=|F_1F_2|$，求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

10. 已知直线 $y=kx$ 与双曲线 $4x^2-y^2=16$. 当 k 为何值时，直线与双曲线：

（1）有两个公共点；

（2）有一个公共点；

（3）没有公共点？

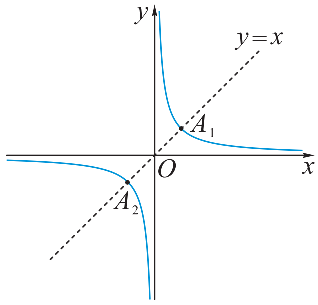
温故而知新

11. 若 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点，点 P 在此双曲线上，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|=32$，求 $\angle F_1PF_2$ 的大小.

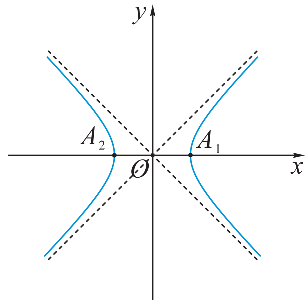
12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两条渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，若顶点到渐近线的距离为 1，求该双曲线的方程.

13. （1）如图(1)，反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象是双曲线，两条坐标轴是它的渐近线，求它的实半轴长和半焦距；

（2）如图(2)，以(1)中双曲线的中心为原点，实轴所在的直线为 x 轴重新建立直角坐标系，求双曲线在这个坐标系中的方程.



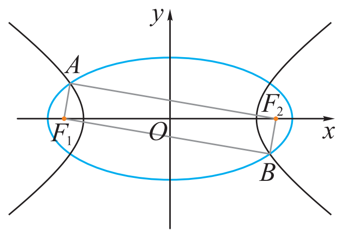
(1)



(2)

（第 13 题）

14. 如图，F_1，F_2是椭圆 C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2的公共焦点，A，B 分别是C_1，C_2在第二、四象限的公共点．若四边形 AF_1BF_2为矩形，求 C_2的离心率．



（第 14 题）

15. 已知 F 是双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 的左支上一点，点 $A(0,6\sqrt{6})$．当$\triangle APF$ 的周长最小时，求该三角形的面积．

16. 已知双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，过点 $A(0,1)$作直线 l 交双曲线于P_1，P_2，若线段 P_1P_2的中点在直线 $x=\frac{1}{2}$上，求直线 l 的斜率．

3.3 抛物线

3.3.1 抛物线的标准方程

在初中，我们将二次函数的图象称为抛物线．在重力作用下的平抛或斜抛物体（比如运动场上推出的铅球、投出的篮球、水池里喷出的水柱），其运动的轨迹都是抛物线的一部分．

怎样通过几何性质来刻画抛物线呢？

实验 任给一个定点 F 和一条直线 l．设计适当的方法或装置画出到 F 和 l 距离相等的点的轨迹并观察轨迹的形状．

如图 3.3－1，将一直尺固定在直线 l 上，取一个直角三角板，以它的一条直角边靠紧直尺的一边 l．在另一条直角边上取定点 A，设三角板的直角顶点为 C．再取一条长度正好等于 AC 的细线，将这条细线的一端固定在三角板上的点 A 处，另一端用大头针固定在点 F 处．用铅笔将细线绷紧，使铅笔尖贴在三角板的边 AC 之上．让三角板沿着直尺滑动，则铅笔尖所在的点 P 就画出所要作的轨迹的一段．

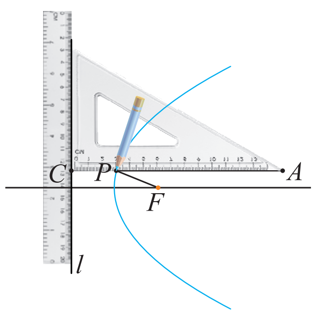


图 3.3－1

观察画出的轨迹的形状，发现它与二次函数的图象——抛物线很相似．为了验证这个猜想，我们先设法求出轨迹的方程．

已知定点 F 与一条定直线 l，$F\notin l$．动点 P 到 F 与 l 的距离相等．建立适当的平面直角坐标系，求动点 $P(x，y)$ 的轨迹方程．

如图 3.3－2，过点 F 作直线 l 的垂线，交 l 于点 D．设 $|FD|=p$．取 FD 的中点

O 为原点，以$\overrightarrow{OF}$的方向为 x 轴的正方向，建立平面直角坐标系.

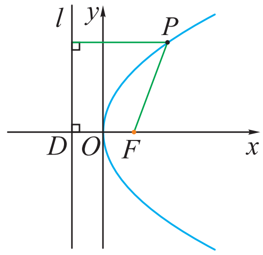


图 3.3-2

点 $P(x，y)$到点 $F\left(\frac{p}{2}，0\right)$的距离 $d_1=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$，

点 $P(x，y)$到直线 l 的距离 $d_2=\left|x+\frac{p}{2}\right|$.

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2=2px.$$

因此，所求轨迹的方程为 $y^2=2px$.

如果以 O 为原点、$\overrightarrow{OF}$的方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系，则可得轨迹方程为 $x^2=2py$，即 $y=\frac{1}{2p}x^2$，这是以 x 为自变量、y 为因变量的二次函数，在初中数学中就知道它的图象是抛物线. 而 $y^2=2px$ 的图象是将开口向上的抛物线 $y=\frac{1}{2p}x^2$ 绕顶点沿顺时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$得到的.

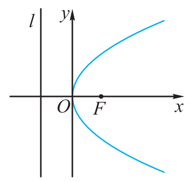
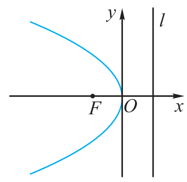
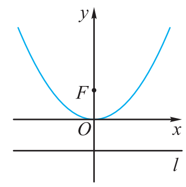
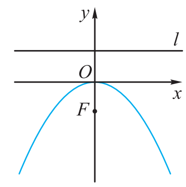
我们把平面内与一个定点 F 和一条定直线 $l(F\notin l)$距离相等的点的轨迹叫作**抛物线**，点 F 叫作**抛物线的焦点**，直线 l 叫作**抛物线的准线**.

从上述过程可以看到，对于任意 $p>0$，焦点为 $F\left(\frac{p}{2}，0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$ 的抛物线方程为

$$y^2=2px，$$

这称为**抛物线的标准方程**.

按其他方式建立直角坐标系，可以得出抛物线其他形式的方程. 如果建立的坐标系满足条件：原点是焦点到准线的垂线段的中点，一条坐标轴垂直于准线，所得的抛物线方程就称为标准方程. 这样的标准方程及其图象有如下四种情况.

图　象				
标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
焦点坐标	$\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(-\dfrac{p}{2},\ 0\right)$	$\left(0,\ \dfrac{p}{2}\right)$	$\left(0,\ -\dfrac{p}{2}\right)$
准线方程	$x=-\dfrac{p}{2}$	$x=\dfrac{p}{2}$	$y=-\dfrac{p}{2}$	$y=\dfrac{p}{2}$

例 1 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

(1) $y^2=4x$；　　　　(2) $y=ax^2$，其中 $a>0$.

解　(1) 方程具有标准形式 $y^2=2px$，其中 $2p=4$，从而 $p=2$，$\dfrac{p}{2}=1$.

抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，故焦点坐标为$(1,\ 0)$，准线方程为 $x=-1$.

(2) 方程可化为 $x^2=\dfrac{1}{a}y$，具有标准形式 $x^2=2py$，其中 $2p=\dfrac{1}{a}$，从而 $p=\dfrac{1}{2a}$，$\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{4a}$.

抛物线的焦点在 y 轴的正半轴上，故焦点坐标为$\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，准线方程为 $y=-\dfrac{1}{4a}$.

例 2 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

(1) 焦点为 $F(0,\ -4)$；　　　　(2) 准线方程为 $x=\dfrac{1}{2}$.

解　(1) 因为焦点在 y 轴的负半轴上，并且

$$-\frac{p}{2}=-4,$$

即

$$p=8.$$

因此，所求抛物线的标准方程为 $x^2=-16y$.

(2) 由准线方程为 $x=\dfrac{1}{2}$知，焦点在 x 轴的负半轴上，并且

$$\frac{p}{2}=\frac{1}{2},$$

即
$$p=1.$$

因此，所求抛物线的标准方程为$y^2=-2x$.

练习

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程，并画出草图.

（1）$y^2=16x$；（2）$y=16x^2$；（3）$y^2=-\frac{1}{4}x$；（4）$y=-\frac{1}{4}x^2$.

2. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

（1）焦点为$F(-2，0)$；（2）准线方程为$y=-4$；

（3）焦点到准线的距离为6.

3.3.2 抛物线的简单几何性质

下面，我们根据抛物线的标准方程

$$y^2=2px(p>0) \quad ①$$

来研究它的一些几何性质.

一 范围

在方程①中，因为$p>0$，$y^2\geqslant0$，所以抛物线①上的点的横坐标都满足$x\geqslant0$. 于是，抛物线在y轴的右侧，并且向右无限延伸. 当x的值增大时，$|y|=\sqrt{2px}$也增大，说明这条抛物线向右上方和右下方无限延伸.

二 对称性

在标准方程中，将y换成$-y$，方程①不变，说明这条抛物线关于x轴对称，x轴是它的对称轴.

每一条抛物线有唯一一条对称轴，称为**抛物线的轴**.

三 顶点

抛物线和它的对称轴的交点称为**抛物线的顶点**. 在方程①中，当$y=0$时，$x=0$，因此，抛物线①的顶点为坐标原点$(0，0)$.

四 离心率

抛物线上的点到焦点的距离和它到准线的距离之比，叫作**抛物线的离心率**，用 e 表示．由定义可知，$e=1$．

例 3 已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在原点，并且经过点 $P(1,2)$．求该抛物线的标准方程．

解 由于抛物线关于 x 轴对称，顶点在原点，并且经过点$(1,2)$，因此可设它的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

将点 $P(1,2)$的坐标代入方程，得

$$2^2=2p\times1,$$

即

$$p=2.$$

因此，所求抛物线的标准方程为

$$y^2=4x.$$

例 4 已知抛物线的顶点在原点，焦点坐标为$(1,0)$，一条斜率为 1 的直线 l 经过抛物线的焦点 F，且与抛物线相交于 A，B 两点，求$|AB|$．

解 （方法一）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

由已知可得直线 l 的方程：$y=x-1$． ①

又抛物线的焦点坐标为$(1,0)$，故抛物线的方程为

$$y^2=4x. \quad ②$$

联立①、②，消去 y 可得

$$x^2-6x+1=0. \quad ③$$

由一元二次方程根与系数的关系得

$$x_1+x_2=6,\ x_1x_2=1.$$

于是

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+[(x_1-1)-(x_2-1)]^2}\\&=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6^2-4\times1}\\&=8.\end{aligned}$$

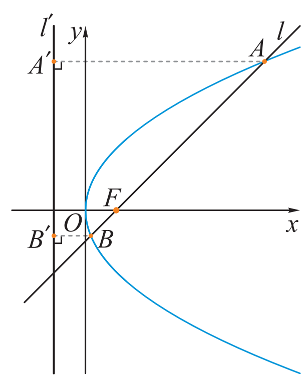


图 3.3－3

（方法二）如图 3.3－3．设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．过 A，B 分别向准线 l'作垂线，垂足为 A'，B'．

由抛物线的定义可知，

$$|AF|=|AA'|=x_1+1,\ |BF|=|BB'|=x_2+1.$$

于是

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

由方法一中的方程③可知

$$x_1+x_2=6,$$

于是
$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

例 5 已知抛物线 C：$y^2=2x$，直线 l 过定点$(0, -2)$. 讨论直线 l 与抛物线的公共点的情况.

分析 用解析法解决这个问题，首先要考虑直线 l 的斜率是否存在，进而根据直线 l 过定点设出直线方程，并讨论由直线方程与抛物线方程组成的方程组的解的情况，就可以判断直线 l 与抛物线的位置关系.

解 （Ⅰ）若直线 l 的斜率存在，记为 k. 又直线过定点$(0, -2)$，可设直线 l 的方程为

$$y=kx-2. \tag{①}$$

由方程组

$$\begin{cases} y=kx-2, \\ y^2=2x \end{cases} \tag{②}$$

消去 y，并整理得

$$k^2x^2-(4k+2)x+4=0. \tag{③}$$

(1) 当 $k=0$ 时，由方程③，得 $x=2$. 此时方程①的解为 $y=-2$.

这时，直线 l 与抛物线只有一个公共点$(2, -2)$.

(2) 当 $k\neq 0$ 时，方程②的判别式

$$\Delta=[-(4k+2)]^2-4\cdot k^2\cdot 4=16k+4.$$

若 $\Delta>0$，解得 $k>-\frac{1}{4}$.

于是，当 $k>-\frac{1}{4}$，且 $k\neq 0$ 时，方程③有两个实数解，从而方程组②有两组实数解. 这时，直线 l 与抛物线相交，有两个公共点.

若 $\Delta=0$，解得 $k=-\frac{1}{4}$.

于是，当 $k=-\frac{1}{4}$时，方程③有一个实数解，从而方程组②只有一组实数解. 这时，直线 l 与抛物线有一个公共点.

若 $\Delta<0$，解得 $k<-\frac{1}{4}$.

于是，当 $k<-\frac{1}{4}$ 时，方程③无实数解，从而方程组②无实数解．这时，直线 l 与抛物线没有公共点.

（Ⅱ）若直线 l 的斜率不存在，这时直线 l 即 y 轴所在直线，它与抛物线 $y^2=2x$ 相切，即有一个公共点.

综上可得：

当 $k=0$，或 $k=-\frac{1}{4}$，或直线的斜率不存在时，直线 l 与抛物线只有一个公共点；

当 $k>-\frac{1}{4}$，且 $k\neq 0$ 时，直线 l 与抛物线有两个公共点；

当 $k<-\frac{1}{4}$ 时，直线 l 与抛物线没有公共点.

直线 l 与抛物线 C 的位置关系如图 3.3－4 所示.

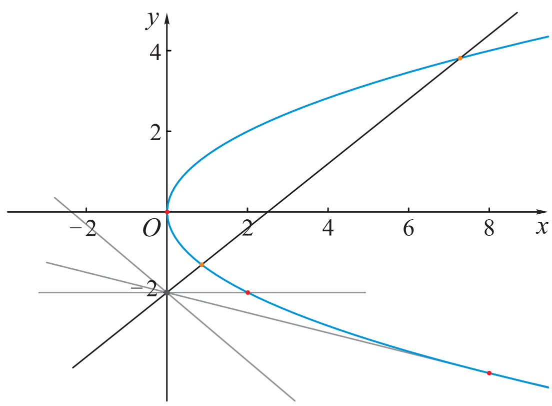


图 3.3－4

练 习

1. 求下列抛物线的顶点坐标、对称轴、焦点坐标和准线方程.

（1）$y^2=2x$；　（2）$x^2=32y$；　（3）$y=-8x^2$；　（4）$x=-\frac{1}{16}y^2$.

2. 在同一坐标系中画出下列抛物线：

（1）$y^2=\frac{1}{4}x$；　（2）$y^2=x$；　（3）$y^2=2x$.

再比较这些图形，说明抛物线开口的大小与方程中 x 的系数之间的关系.

3. 设 F 为抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于 A，B 两点，求 $|AB|$ 及 $\triangle OAB$ 的面积.

4. 过点 $M(0，4)$ 作直线 l 与抛物线 $y^2=8x$ 只有一个公共点．这样的直线有几条？

习题 3.3

学而时习之

1. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：

（1）$y^2=x$；　　（2）$x^2=-y$；

（3）$x^2+12y=0$；　　（4）$y^2=ax(a\neq 0)$.

2. 求适合下列条件的抛物线的标准方程：

（1）顶点在原点，准线方程为 $y=4$；

（2）顶点在原点，且过点$(-3,2)$；

（3）顶点在原点，对称轴为 x 轴，焦点在直线 $3x-4y-12=0$ 上；

（4）顶点在原点，焦点在 x 轴上，且抛物线上一点 $A(3,m)$到焦点的距离为 5.

3. 填空：

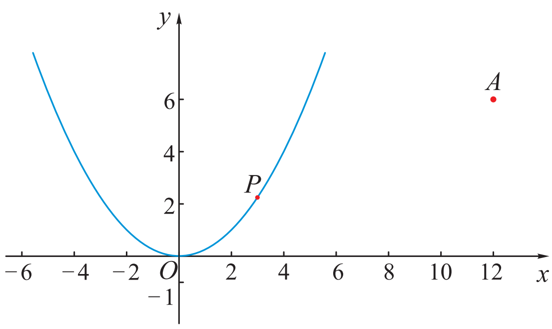
（1）设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4，则点 P 到该抛物线焦点的距离为________；

（2）设抛物线 $y=4x^2$ 上一点 M 到焦点的距离为 1，则点 M 的坐标为________.

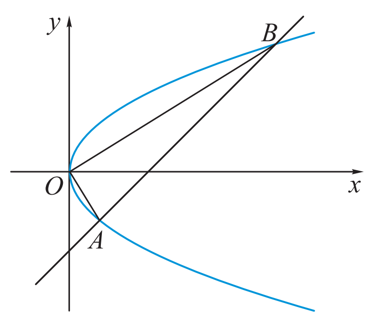
4. 已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点，求$|FN|$.

5. 已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 C：$y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点，P 为 C 上一点，若$|PF|=4\sqrt{2}$，求$\triangle POF$ 的面积.

6. 如图，已知点 P 是抛物线 $x^2=4y$ 上的动点，点 A 的坐标为$(12,6)$，求点 P 到点 A 的距离与到 x 轴的距离之和的最小值.



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A，B 两点.

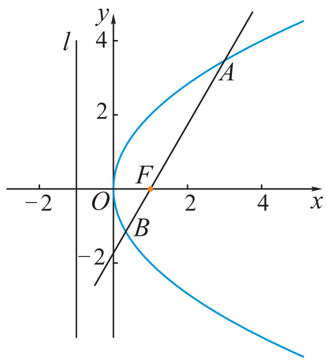
（1）求证：$OA\perp OB$；　　（2）求$|AB|$.

8. 已知抛物线的方程为 $x^2=4y$，直线 l 过定点$(-1，-2)$，斜率为 k. 当 k 为何值时，直线 l 与抛物线有一个公共点，有两个公共点，没有公共点？

温故而知新

9. 已知顶点在原点，焦点在 x 轴上的抛物线被直线 $y=2x+1$ 截得的弦长为 $\sqrt{15}$，求该抛物线的方程.

10. 如图，已知以 F 为焦点的抛物线 $y^2=4x$ 上的两点 A，B 满足 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，求弦 AB 的中点到准线 l 的距离.



（第 10 题）

11. 已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线交抛物线于 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点. 求证：

（1）$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$；

（2）以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切.

12. 已知 F 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，直线 l_1 与 C 交于 A，B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D，E 两点，求$|AB|+|DE|$的最小值.

3.4 曲线与方程

解析几何与欧氏几何的区别在于，它是用代数方法研究、解决有关几何图形的问题．其基本思路是先将几何图形及其性质用代数语言来描述，利用代数运算的方法加以解决，再将所得的结果翻译成几何语言．

反过来，对一些代数问题，也可以用几何模型加以解释，用几何方法研究解决．

前面我们已经用解析几何的方法研究了圆、椭圆、双曲线、抛物线等平面曲线，回顾一下，我们研究的基本方法是：

1．在平面上建立适当的直角坐标系，用(x, y)表示曲线上任意一点的坐标．

2．由于曲线通常可以看成是满足一定条件的点的轨迹(即曲线上任意一点都满足此条件，而所有满足此条件的点都在曲线上)，于是将曲线上的点满足的几何条件转换成该点的坐标(x, y)满足的代数等式，得到该曲线的方程．

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线C(看作满足某种条件的点的集合或轨迹)上的点与一个二元方程$f(x, y)=0$的实数解建立了如下关系：

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解，

(2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点，

此时，这个方程叫作**曲线的方程**，这条曲线叫作**方程的曲线**．

3．确定曲线的方程后，通过研究方程的性质从而得到曲线的几何性质．

我们称这种研究几何的方法为坐标法．基于坐标法，我们将几何问题转化为代数问题来解决，这也是解析几何的核心思想．

例 1 如图 3.4－1，在圆$x^2+y^2=9$上任取一点P，过点P向x轴作垂线段PD，D为垂足．求线段PD的中点M的轨迹方程．

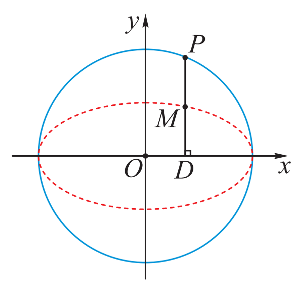


图 3.4－1

分析 求点M的轨迹方程，就是求点M的横、纵坐标所满足的方程．我们可设出点M的坐标，利用中点坐标公式表示出点P的坐标，再代入点P所在的圆的方程，即可求出点M的轨迹方程．

解 设点M的坐标为(x, y)，点P的坐标为(x_0, y_0)，则

$$x=x_0,\quad y=\frac{y_0}{2}.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=9$ 上，所以

$$x_0^2+y_0^2=9.$$

把 $x_0=x$，$y_0=2y$ 代入上述方程，得

$$x^2+4y^2=9.$$

即所求轨迹方程为 $$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1.$$

点 M 的轨迹是长轴长为 6，短轴长为 3 的椭圆.

若点 M 分 PD 之比为 $\frac{1}{2}$，试求出点 M 的轨迹.

由上，并结合例 1，你能发现椭圆与圆的关系吗？

例 2 点 $M(x, y)$ 与定点 $F(1, 0)$ 的距离和它到直线 l：$x=4$ 的距离的比是常数 $\frac{1}{2}$，求点 M 的轨迹.

解 设点 $M(x, y)$ 到直线 l 的距离为 d，由题意得

$$\frac{|MF|}{d}=\frac{1}{2},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|4-x|}=\frac{1}{2}.$$

将上式化简，得

$$3x^2+4y^2=12,$$

即 $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

所以点 M 的轨迹是长轴长为 4，短轴长为 $2\sqrt{3}$ 的椭圆，如图 3.4－2.

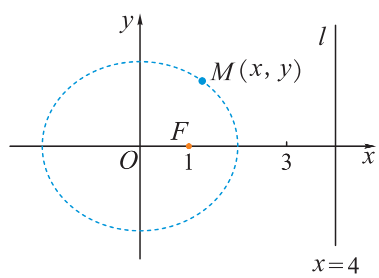


图 3.4－2

在例 2 中，若将定点 F 的坐标改为 $(-1, 0)$，直线 l 的方程改为 $x=-4$，你能求出点 M 的轨迹吗？

例 3 如图 3.4－3，已知点 A，B 的坐标分别为 $(-2, 0)$，$(2, 0)$，直线 AP，BP 相交于点 P，且它们的斜率之积是 $\frac{1}{4}$，求点 P 的轨迹方程.

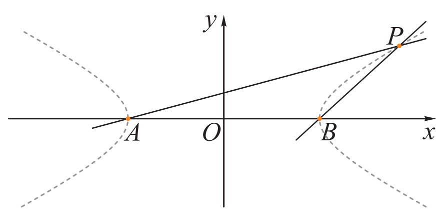


图 3.4－3

分析 设点 P 的坐标为 (x, y)，那么直线 AP，BP 的斜率就可以用含 x，y 的式子表示. 已知两直线的斜率之积为 $\frac{1}{4}$，因此可以建立 x，y 之间的关系式，得出点

P 的轨迹方程.

解 设点 P 的坐标为 (x, y)，由点 A，B 的坐标可得直线 AP，BP 的斜率分别为

$$k_{AP}=\frac{y}{x+2}(x\neq -2),\ k_{BP}=\frac{y}{x-2}(x\neq 2).$$

由已知得

$$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=\frac{1}{4}(x\neq\pm 2),$$

化简得点 P 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1(x\neq\pm 2).$$

例 4 已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线 l 于 P，Q 两点.

（1）若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，AR 与 FQ 平行吗？

（2）若△PQF 的面积是△ABF 的 2 倍，求 AB 的中点的轨迹方程.

解 （1）由题意知 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. 如图 3.4－4，设 l_1：$y=a$，l_2：$y=b$，则 $ab\neq 0$，得 $A\left(\frac{a^2}{2}, a\right)$，$B\left(\frac{b^2}{2}, b\right)$，$P\left(-\frac{1}{2}, a\right)$，$Q\left(-\frac{1}{2}, b\right)$，$R\left(-\frac{1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

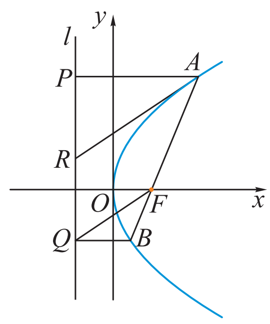


图 3.4－4

由 A，B 两点的坐标可得直线 AB 的方程为

$$2x-(a+b)y+ab=0.$$

由于 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$在线段 AB 上，故 $\quad 1+ab=0.$ ①

设直线 AR 的斜率为 k_1，直线 FQ 的斜率为 k_2，利用①可推

$$k_1=\frac{a-b}{1+a^2}=\frac{a-b}{a^2-ab}=\frac{1}{a}=\frac{-ab}{a}=-b=k_2.$$

所以 $AR/\!/FQ$.

（2）如图 3.4－5，设直线 AB 与 x 轴相交于点 $D(x_1, 0)$，则 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|a-b||FD|=\frac{1}{2}|a-b|\left|x_1-\frac{1}{2}\right|$，

$$S_{\triangle PQF}=\frac{|a-b|}{2}.$$

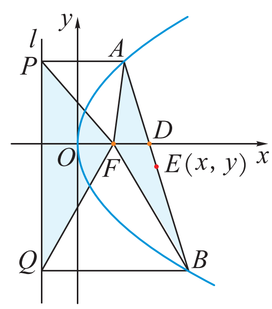


图 3.4－5

因为 $S_{\triangle PQF}=2S_{\triangle ABF}$，于是

$$\frac{|a-b|}{2}=|a-b|\left|x_1-\frac{1}{2}\right|,$$

解得 $\quad x_1=0$（舍去）或 $x_1=1$. 即点 D 的坐标为 $(1, 0)$.

设 AB 的中点为 $E(x, y)$.

当 AB 与 x 轴不垂直时，由 $k_{AB}=k_{DE}$ 可得

$$\frac{2}{a+b}=\frac{y}{x-1}(x\neq 1),$$

而 $\frac{a+b}{2}=y$，所以 $y^2=x-1(x\neq 1)$. ②

当 AB 与 x 轴垂直时，由抛物线的对称性可知，点 E 与点 D 重合，此时 E 点坐标符合方程②.

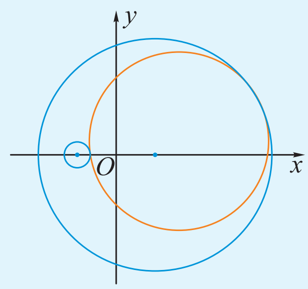
所以，所求的轨迹方程为 $y^2=x-1$.

练 习

1. 如图，一动圆与圆 O_1：$(x+3)^2+y^2=1$ 外切，与圆 O_2：$(x-3)^2+y^2=81$ 内切，求动圆圆心的轨迹方程.

2. 已知点 $M(x, y)$ 到定点 $F(5, 0)$ 的距离和它到定直线 l：$x=\frac{16}{5}$ 的距离之比是常数 $\frac{5}{4}$，求点 M 的轨迹方程.

3. 已知点 A，B 的坐标分别是 $(-1, 0)$，$(1, 0)$，直线 AM，BM 相交于点 M，且直线 AM 的斜率与直线 BM 的斜率之差为 2，求点 M 的轨迹方程.



（第 1 题）

多知道一点

圆锥曲线的统一定义

前面，我们已经分别给出了椭圆、双曲线、抛物线三者的定义，那么我们能否给这三种圆锥曲线下一个统一的定义呢？

先来看抛物线，我们知道抛物线是到定点 F 和定直线 $l(F\notin l)$ 距离相等的点的轨迹. 建立平面直角坐标系使 F 的坐标为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，$l$ 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$，则

点 $P(x, y)$ 在抛物线上 $\Leftrightarrow |PF|$ 等于 P 到 l 的距离

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

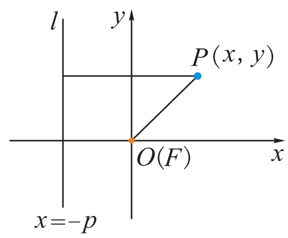
$$\Leftrightarrow y^2=2px.$$

显然，抛物线的定义还可以改写为：抛物线是到定点 F 和到定直线 l 的距离之比为 $e=1$ 的点的轨迹. 这不禁使人思考：当这个比值 $e(e>0)$ 是一个不等于 1 的常数时，动点 P 的轨迹又是怎样的曲线呢？

例 任意给定常数 $e(e>0)$、定点 F 和定直线 $l(F\notin l)$. 动点 P 到 F 的距离 d_1 与 P 到

l 的距离 d_2 之比等于 e. 试建立平面直角坐标系，求点 P 的轨迹方程.

解 如图，设点 F 到 l 的距离为 $p(p>0)$. 以 F 为原点建立平面直角坐标系，使 x 轴垂直于 l，则 l 的方程为 $x=-p$.



$$d_1=|PF|=\sqrt{x^2+y^2},\ d_2=|x+p|.$$

点 P 满足条件 $\frac{d_1}{d_2}=e$，则 $d_1=ed_2$，即

$$\sqrt{x^2+y^2}=e|x+p|.$$

两边平方，并整理得

$$(1-e^2)x^2+y^2-2pe^2x-e^2p^2=0, \quad ①$$

这就得到点 P 的轨迹方程.

当 $e=1$ 时，方程①为 $y^2-2px-p^2=0$，可写为

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right). \quad ②$$

将它的图象向右移动 $\frac{p}{2}$ 个单位长度，图象上的点 $P(x,y)$ 移动到新的位置 $P'(x',y')$，其中 $x'=x+\frac{p}{2}$，$y'=y$，则移动后图象上的点 P' 的坐标 (x',y') 满足的方程为 $y'^2=2px'$. 这说明，经过平移，当 $e=1$ 时，方程①恰好变为我们熟悉的抛物线的标准方程.

当 $e\neq1$ 时，方程①可改写为 $(1-e^2)\left(x-\frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2+y^2-\frac{p^2e^2}{1-e^2}=0$，整理得

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2e^2}\left(x-\frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2+\frac{1-e^2}{p^2e^2}y^2=1. \quad ③$$

设 $a^2=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}$，$b^2=\frac{p^2e^2}{|1-e^2|}$，$c^2=\frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2}(a>0,b>0,c>0)$，则

当 $e<1$ 时，方程③变为 $\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，这是中心在 $(c,0)$，长、短半轴长分别为 a，b 的椭圆方程.

当 $e>1$ 时，方程③变为 $\frac{(x+c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，这是中心在 $(-c,0)$，实、虚半轴长分别为 a，b 的双曲线方程.

这样，我们可以对圆锥曲线下一个统一的定义：

任意给定常数 $e(e>0)$、点 F 和直线 $l(F\notin l)$，设动点 P 到 F 的距离与到直线 l 的距离之比等于 e，则 P 的轨迹是圆锥曲线(不包括圆). 其中 F 是这条圆锥曲线的焦点，l 称为它的准线.

当 $e<1$ 时，P 的轨迹是椭圆；

当 $e=1$ 时，P 的轨迹是抛物线；

当 $e>1$ 时，P 的轨迹是双曲线.

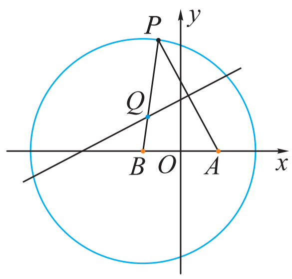
习题 3.4

学而时习之

1. 椭圆可以视为对圆上的点向同一条直径实施伸缩变换而得到. 运用椭圆与圆之间的这种关系，你能根据圆的面积猜想椭圆的面积公式吗?

2. 已知$\triangle ABC$三边AB，BC，CA的长成等差数列，且$|AB|>|CA|$，点B，C的坐标分别为$(-1,0)$，$(1,0)$，求点A的轨迹方程，并指出它是什么曲线.

3. 如图，P为圆B：$(x+2)^2+y^2=36$上一动点，点A的坐标为$(2,0)$，线段AP的垂直平分线交直线BP于点Q，求动点Q的轨迹方程.



（第 3 题）

4. 已知动点M与两定点$A(-3,0)$，$B(3,0)$构成$\triangle MAB$，且直线MA，MB的斜率之积为 4，求动点M的轨迹方程.

5. 一圆经过点$F(0,3)$，且和直线$y+3=0$相切，求圆心的轨迹方程，并画出图形.

6. 已知点$P(x,y)$到定点$F(c,0)$和定直线$x=\frac{a^2}{c}$的距离之比是常数$\frac{c}{a}$$(a>0$，$c>0)$，求点$P$的轨迹方程.

温故而知新

7. 在$\triangle ABC$中，$|BC|=24$，AC，AB的两条中线之和为 39，求$\triangle ABC$的重心的轨迹方程.

8. 已知一条水平直线l和它上方的一个点F，点F到l的距离是 2. 一条曲线也在l的上方，它上面的每一点到F的距离减去到l的距离的差都是 2. 建立适当的坐标系，求这条曲线的方程.

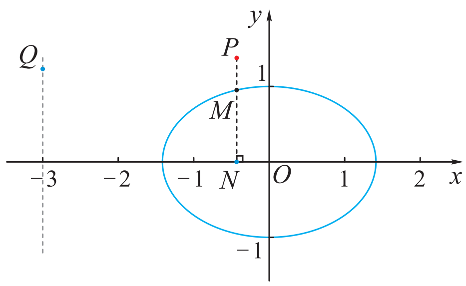
9. 在边长为$2a$的正$\triangle ABC$内有一动点P，已知$|PA|^2=|PB|^2+|PC|^2$，

求点 P 的轨迹方程.

10. 如图，设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\ \overrightarrow{NM}$.

（1）求点 P 的轨迹方程.

（2）设点 Q 在直线 $x=-3$ 上，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.



（第 10 题）

3.5 圆锥曲线的应用

前面，我们利用实验的手段初步认识了圆锥曲线，并通过代数方法来研究圆锥曲线的几何性质．事实上，圆锥曲线在自然界客观存在．人们通过科学研究发现了它，并利用其独特的物理性质，在科学探索和生产实践中发挥着重要的作用．

一 天体运动的轨道

翻开人类科学探索史，仰望星空、测量并记录日月星辰的运动以理解我们所处的宇宙是人们孜孜不倦的重要主题．在相当长一段时间内，人们都认为地球是宇宙的中心，而所有恒星和行星都围绕地球旋转．直到 1543 年，波兰人哥白尼提出“日心说”才纠正了这一错误，但他和其他天文学家认为行星运行的轨道是圆形的．德国人开普勒根据第谷观测行星运动的大量数据提出：火星是沿着一条椭圆的轨道围绕太阳运行，而太阳不是椭圆的中心，而是在椭圆的一个焦点上．

开普勒将其研究发现总结为开普勒行星运动定律，这激发了人们更深入的思考．牛顿根据开普勒定律得出了万有引力定律，人们按照万有引力定律可以推出，太阳系的行星每时每刻都环绕太阳在椭圆轨道上运行，而某些天体的运行速度若增大到某种程度，它就会沿抛物线或双曲线运行，如图 3.5－1．

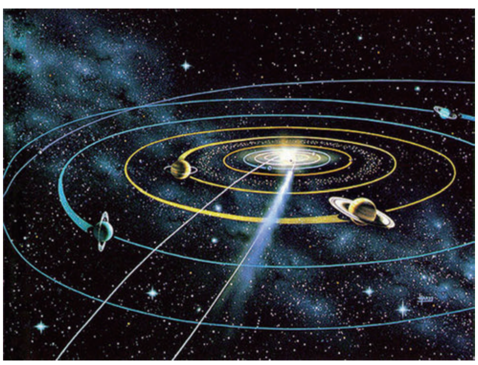


图 3.5－1

> 行星漫游天际的千古之谜终于真相大白，而古希腊几何学的圆锥曲线竟然是大自然(宇宙)至善至美的杰作．这也标志着人类在理性认识世界的进程中大大迈进了一步．

例 1 某颗小行星的运行轨道是一个椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点处．如图 3.5－2 所示，小行星离太阳的最近距离是 1.486 天文单位，最远距离是 5.563 天文单位(1 天文单位是指太阳与地球之间的平均距离，约为 1.50×10^{8} km，是天文学的一种长度单位)．求椭圆轨道的长半轴和短半轴之长各是多少个天文单位．

解 如图 3.5-2，设椭圆的焦点为 F_1，F_2，焦距为 $2c$，太阳位于焦点 F_1 处.

小行星位置 P 到两焦点的距离之和 $|PF_1|+|PF_2|$ 等于一个固定值 $2a$. 要使 $|PF_1|$ 最大，必须距离之差 $|PF_1|-|PF_2|$ 最大. 但 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant|F_1F_2|=2c$，仅当 F_1，F_2，P 成一条直线且 F_2 在 F_1 和 P 之间时，$|PF_1|-|PF_2|$ 达到最大值 $2c$，$|PF_1|$ 达到最大值 $\dfrac{2a+2c}{2}=a+c$. 而仅当 $|PF_2|$ 达到最大值 $a+c$ 时，$|PF_1|$ 达到最小值 $a-c$. 可见

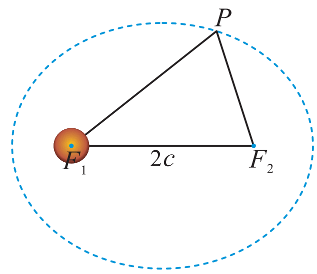


图 3.5-2

$$\begin{cases}a+c=5.563,\\ a-c=1.486.\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{5.563+1.486}{2}=3.524\ 5$，$c=5.563-3.524\ 5=2.038\ 5$.

因此 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3.524\ 5^2-2.038\ 5^2}\approx2.875\ 2$.

故椭圆的长半轴长为 3.524 5 天文单位，短半轴长为 2.875 2 天文单位.

二 斜抛物体的轨迹

运动场上推出的铅球、投出的篮球，都是斜抛物体，它们的运动轨迹近似于抛物线. 喷水池里喷出的水柱中的每一部分水也可以看作斜抛物体，水柱的形状也接近于抛物线.

例 2 将物体向斜上方抛出，抛出时的速度大小为 v_0，方向与水平方向的夹角为 α. 假如只考虑重力，不计空气阻力，证明斜抛物体的运动轨迹是抛物线的一部分，并求这条抛物线的焦点与准线之间的距离.

解 如图 3.5-3，设物体运动轨迹的最高点为 O，以 O 为原点在运动轨迹所在平面内建立平面直角坐标系，以 1 m 为单位长度，使 x 轴指向物体在点 O 前进的方向，y 轴的正方向竖直向上.

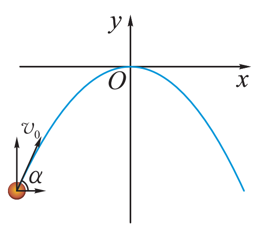


图 3.5-3

设物体在点 O 的时刻为 0，物体在 t 时刻的位置坐标为 (x, y). 这里允许 t 取负值，表示物体到达最高点 O 之前的情况.

斜抛物体的运动可以分解为水平方向的运动和竖直方向的运动．物体在水平方向（即 x 轴方向）没有受力，其运动是匀速直线运动，速度为 $v_0\cos\alpha$，则物体在时刻 t 的横坐标为 $x=(v_0\cos\alpha)t$.

物体在竖直方向（即 y 轴方向）上有重力加速度 $-g$，到达最高点 O 时（即 $t=0$ 时）的速度为 0，则物体在时刻 t 的纵坐标为 $y=-\frac{1}{2}gt^2$.

故物体在时刻 t 的位置坐标 $(x,\ y)=\left(v_0t\cos\alpha,\ -\frac{1}{2}gt^2\right)$.

由 $x=v_0t\cos\alpha$ 解得 $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$，再代入纵坐标表达式，得

$$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2,$$

则

$$x^2=-\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}y.$$

它具有抛物线标准方程 $x^2=-2py$ 的形式，其中 $p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$.

这证明了斜抛物体的运动轨迹是抛物线，这个抛物线的焦点与准线之间的距离为 $p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$.

三　光学性质及其应用

圆锥曲线具有丰富的光学性质.

1. 椭圆绕它的长轴旋转一周形成一个旋转椭球面．以旋转椭球面做反射镜时，从它的一个焦点 F_1 发射的光线，经旋转椭球面的反射后，都聚集在另一个焦点 F_2 处，如图 3.5-4．人们利用这一性质来设计电影放映机的聚光灯的反射镜面，将光源安置在椭圆的一个焦点处，将电影胶片放于另一个焦点处，这样，光源发出的光线经镜面反射后全部聚于另一焦点处，以最强的光线照亮电影胶片.

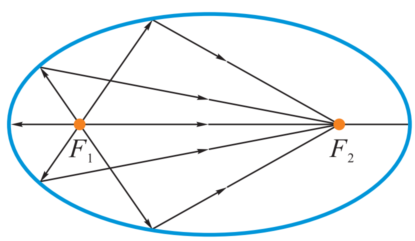


图 3.5-4

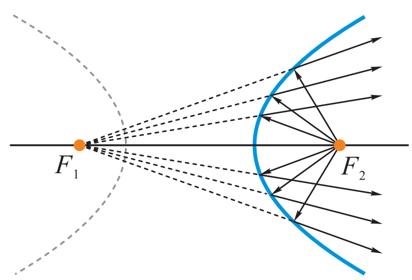


图 3.5-5

2. 双曲线绕实轴旋转一周形成一个旋转双曲面．从旋转双曲面的一个焦点 F_2 发射的光线，经过旋转双曲面的反射，会使得光线散开，而且这些光线就好像是从另一个焦点 F_1 发射出来的一样，如图 3.5-5．双曲线这种反向虚聚焦的性质，在

天文望远镜的设计中有着重要的应用，如图 3.5－6.

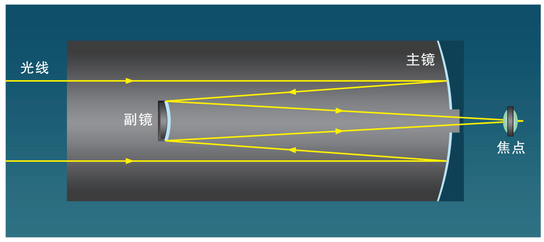


图 3.5－6　哈勃望远镜(其主、副镜均设计成双曲面形状)

3. 抛物线绕它的对称轴旋转一周形成一个旋转抛物面，将光源放在焦点 F 处，光源发出的光线，经旋转抛物面反射后，成为一束平行于对称轴的光线. 汽车前灯和探照灯的制作就是利用这一性质.

再根据光的可逆性，当旋转抛物面的轴与光线平行时，光线经反射后集中于焦点处. 利用抛物线的这一光学性质，人们将射电望远镜设计成旋转抛物面，可以接收宇宙中极远距离发出的光线，这将有助于拓宽人类的视野，以探寻茫茫宇宙的奥秘，如图 3.5－7.

图 3.5－7　中国天眼——世界最大单口径射电望远镜(FAST 工程)

例 3　如图 3.5－8，探照灯反射镜由抛物线的一部分绕对称轴旋转而成，光源位于抛物线的焦点处，这样可以保证发出的光线经过反射之后平行射出. 已知灯口圆的直径为 60 cm，灯的深度为 40 cm.

(1) 将反射镜的旋转轴与镜面的交点称为反射镜的顶点. 光源应安置在旋转轴上与顶点相距多远的地方?

(2) 为了使反射的光更亮，增大反射镜的面积，将灯口圆的直径增大到 66 cm，并且保持光源与顶点的距离不变. 求探照灯的深度.

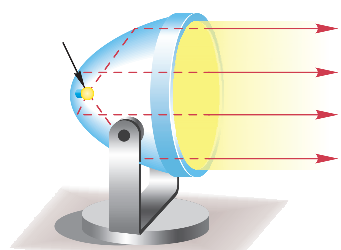


图 3.5－8

解 (1) 如图 3.5-9，在反射镜的轴截面上建立平面直角坐标系，以抛物线的顶点为原点，以旋转轴为 x 轴(抛物线开口方向是 x 轴的正方向)，以 1 cm 为单位长度，则可设抛物线的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$.

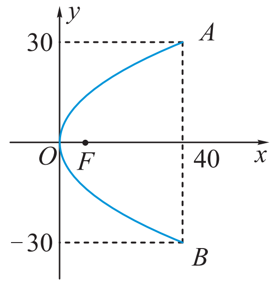


图 3.5-9

灯口圆与轴截面在第一象限内的交点 A 的坐标为(40，30)，代入抛物线方程得

$$30^2=2p\times 40,$$

解得 $p=\dfrac{45}{4}$，则焦点坐标为 $\left(\dfrac{45}{8},\ 0\right)$.

故光源应安置在与顶点相距 $\dfrac{45}{8}$ cm=5.625 cm 处.

(2) 由(1)可得抛物线方程为 $y^2=\dfrac{45}{2}x$.

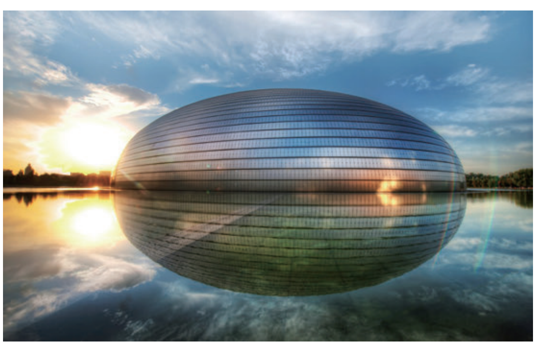
灯口圆与轴截面在第一象限的交点的纵坐标变为 $\dfrac{66}{2}=33$. 故将 $y=33$ 代入抛物线方程求得

$$x=\frac{33^2\times 2}{45}=48.4.$$

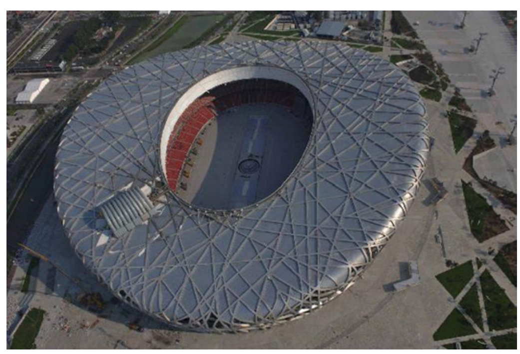
此时，探照灯的深度为 48.4 cm.

四 圆锥曲线在现代建筑中的体现

圆锥曲线广泛存在于现实世界，它线型简洁美观而富有张力，同时还具有某些很好的力学性质，故而被建筑设计师们所推崇并采用. 一座座曲线优美并富有现代感的钢结构建筑拔地而起，在给人美的享受的同时，往往成为城市的地标.

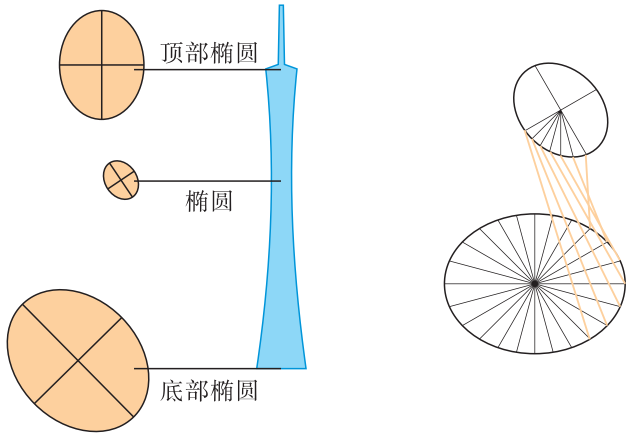


国家大剧院



鸟巢(国家体育场)

广州塔



广州塔结构示意图

图 3.5-10　建筑中的圆锥曲线

圆锥曲线的发现源于古希腊几何学的研究，随着 17 世纪笛卡儿坐标系以及解析几何方法的出现，圆锥曲线这一沉睡千余年的几何明珠又焕发新的生机．伽利略曾说过：“大自然这本书是用数学语言写成的．”当人们用数学的眼光来观察世界、用数学的思维来分析世界、用数学的语言来表达世界时，原来天地之间，圆锥曲线无处不在．回溯圆锥曲线的研究历程，其内涵和形式闪耀光芒，而数学的发现与应用更是激动人心，这将促使我们在科学之路上继续努力去开拓、去创造．

练习

1. 2016 年 8 月 16 日，中国自主研制的世界首颗量子科学实验卫星“墨子号”成功发射升空．已知它的运行轨道是以地心 F_2 为一个焦点的椭圆，近地点 A 距地面 498 km、远地点 B 距地面 503 km，地球半径为 6 371 km，求“墨子号”卫星的轨道方程．

2. 在相距 2 000 m 的两个观测站 A，B 先后听到远处传来的爆炸声，已知 A 站听到的声音比 B 站早 4 s，声速是 340 m/s，判断爆炸点可能分布在什么样的曲线上，并求出该曲线的方程．

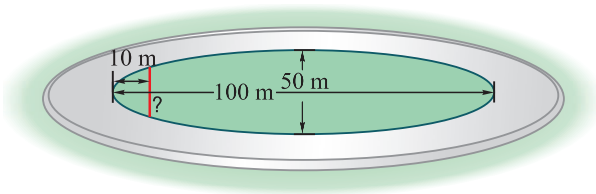
3. 有一条光线沿直线 $y=4$ 从右向左射到抛物线 $y^2=4x$ 上的一点 P，经抛物线反射后，反射光线与抛物线的另一个交点是 Q，O 是抛物线的顶点，F 是抛物线的焦点，求弦 PQ 的斜率和△OPQ 的面积．

习题 3.5

学而时习之

1. 水星运转的轨道是以太阳的中心为一个焦点的椭圆，轨道上离太阳中心最近的距离约为 4.7×10^{8} km，最远的距离约为 7.05×10^{8} km. 假设以这个轨道的中心为原点，以太阳中心及轨道中心所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，求水星轨道的方程.

2. 如图，赛马场的形状是长 100 m，宽 50 m 的椭圆. 求距离顶点 10 m 的宽度是多少.

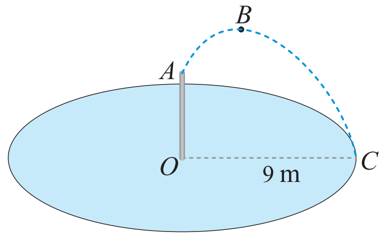


（第 2 题）

3. 如图，发电厂的冷却塔被设计成单叶旋转双曲面的形状(双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面)，可以加强对流，自然通风. 已知某个冷却塔的最小半径为 12 m，上口半径为 13 m，下口半径为 25 m，高为 55 m. 试选择适当的坐标系求此双曲线的方程.

（第 3 题）

4. 某农场为节水推行喷灌技术，喷头装在管柱 OA 的顶端 A 处，喷出的水流在各个方向上呈抛物线状，如图所示. 现要求水流最高点 B 离地面 5 m，点 B 到管柱 OA 所在直线的距离为 4 m，且水流落在地面上以 O 为圆心，以 9 m 为半径的圆上，求管柱 OA 的高度.

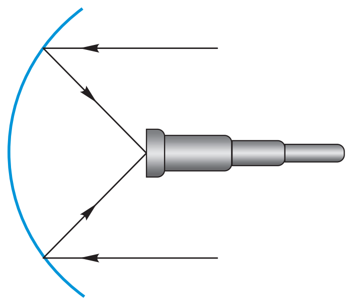


（第 4 题）

5. 一种卫星接收天线的轴截面如图所示. 卫星波束呈近似平行状态射入轴截面为抛物线的接收天线，经反射聚集到焦点处. 已知接收天线的口径（直径）为 4.8 m，深度为 0.5 m.

（1）试建立适当的坐标系，求抛物线的标准方程和焦点坐标；

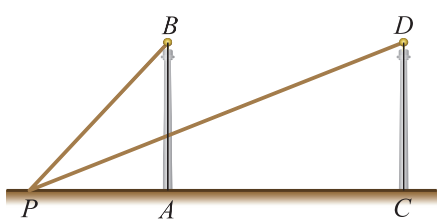
（2）为了增强卫星波束的接收，拟将接收天线的口径增大为 5.2 m，求此时卫星波束反射聚集点的坐标.



（第 5 题）

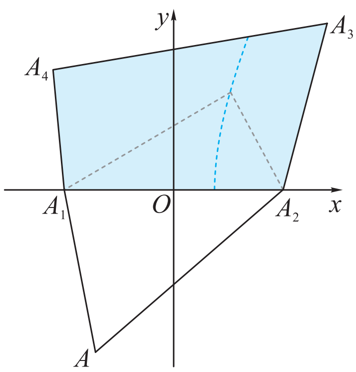
温故而知新

6. 某操场的正前方有两根高度均为 6 m、相距 10 m 的旗杆（都与地面垂直）. 有一条 26 m 长的绳子，两端系在两根旗杆的顶部，并按如图所示的方式绷紧，使得绳子和两根旗杆处在同一个平面内. 假定这条绳子在系到旗杆上时长度没有改变，求绳子与地面（水平面）的接触点到两根旗杆的距离各是多少.

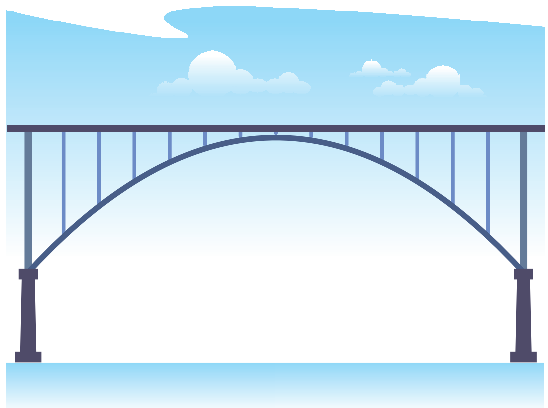


（第 6 题）

7. 如图，某绿色蔬菜种植基地在 A 处，现要把此处生产的蔬菜沿道路 AA_1 或 AA_2 运送到农贸市场 $A_1A_2A_3A_4$ 中去，已知 $AA_1=10$ km，$AA_2=15$ km，$\angle A_1AA_2=60°$，能否在农贸市场中确定一条界线，使位于界线一侧的点沿道路 AA_1 运送蔬菜较近，而另一侧的点沿道路 AA_2 运送蔬菜较近？如果能，说出这条界线是一条什么曲线，并求出该曲线的方程.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，某大桥中央桥孔的跨度为 20 m，拱顶呈抛物线形，拱顶距水面10 m，桥墩高出水面 4 m．现有一货轮欲通过此孔，该货轮水下宽度不超过 18 m．目前吃水线上部分中央船体高 8 m，宽 16 m．若不考虑水下深度，该货轮在此状况下能否通过桥孔？试说明理由.

用计算机探究圆锥曲线的光学性质

访问网络画板，点击“开始作图”，按快捷键“Ctrl+Shift+P”调出变量设置菜单，设置变量 p(如图 1).

图 1

选择“标准抛物线”工具，在弹出菜单中设置开口向右，焦准距为变量 p，点击“确定”后会生成开口向右的抛物线图象；选择抛物线的顶点(将标签改为 O)作为坐标原点，点击“自定义坐标系”，选择抛物线，点击“圆锥曲线焦点”工具，系统自动绘出该抛物线的焦点，将其标签改为 F.

接下来，我们从焦点 F 向抛物线上任意一点 P 作入射光线 FP，根据光的反射定律，入射角等于反射角，可作出反射光线 PM，通过测量反射光线 PM 的斜率来判断反射光线与抛物线对称轴的位置关系.

在抛物线上任取一点 P，连接 FP，选择点 P 及抛物线，点击“切线｜公切线”工具作出抛物线在 P 点处的切线，选择点 P 及切线，点击“垂线”工具作出对应的法线，选择点 F 及法线，点击“轴对称”工具，作出点 F 关于法线的对称点 M，作射线 PM. 选择射线 PM，点击“计算｜测量”工具，在弹出对话框中勾选“斜率”并点击“确定”(如图 2).

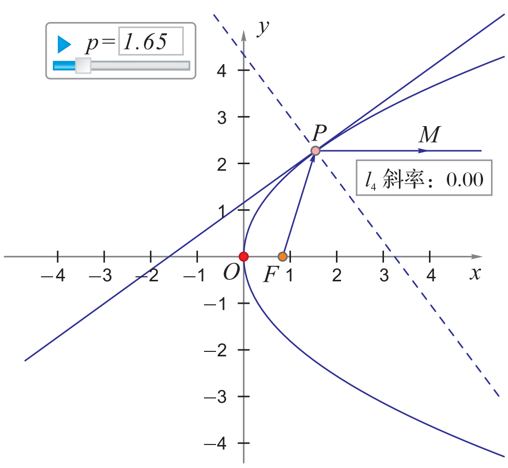


图 2

我们发现，此时反射光线的斜率测量值为 0，这说明反射光线与抛物线对称轴是平行的.

拖动点 P 改变其位置（如图 3），观察测量值是否会改变.

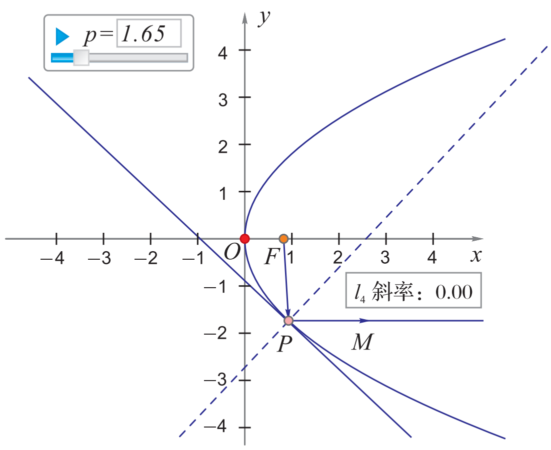


图 3

通过拖动变量 p 下面的滑块调整 p 的值，观察抛物线形状的变化（如图 4），斜率的测量值发生改变了吗？由此你能总结出什么规律？

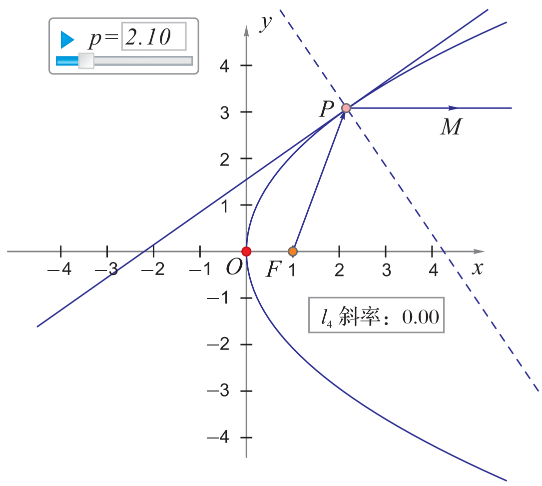


图 4

将抛物线换成椭圆，类似地进行同样的实验（椭圆有两个焦点，选择其中一个焦点为光源），反射光线还有上述规律吗？你有什么新的发现？

试一试，再将椭圆换成双曲线呢？

数学文化

圆锥曲线小史

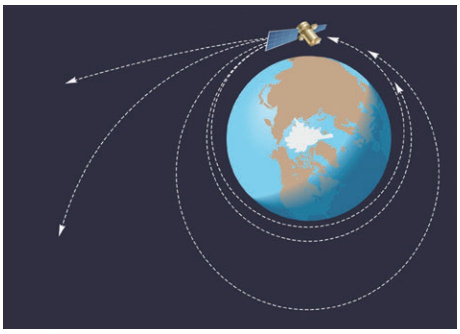
平面在圆锥面上截得的不同曲线称为圆锥曲线．当平面与圆锥面的轴线垂直时，截得的曲线是一个圆；当平面与圆锥面的轴线不垂直时，随着夹角逐渐变小，截得的曲线分别是一个椭圆，一条抛物线，或者双曲线的一支．

在平面直角坐标系中，圆锥曲线又称为二次曲线．

圆锥曲线的研究具有悠久的历史，圆锥曲线的性质在实际中具有广泛的应用．

早在公元前 350 年，柏拉图学派的梅内克缪斯(前 380—前 320）为了解决三等分角问题和倍立方问题，首先系统地研究了圆锥曲线．欧几里得(约前 330—前 275)、阿基米德(前 287—前 212)都写了圆锥曲线方面的著作，阿基米德证明了由抛物线与它的弦围成的图形的面积，等于弦与过弦的端点的两条切线所构成的三角形面积的 2/3．因对圆锥曲线性质的研究而闻名于世的首推古希腊著名的几何学家、天文学家阿波罗尼奥斯(约前 262—前 190)，他是欧几里得的学生，在亚历山大学派中与欧几里得、阿基米德齐名．他首先证明了三种圆锥曲线都可以通过用一个平面与圆锥面相截而得到，而且知道了圆锥曲线的光学性质．他所写的《圆锥曲线论》是一本全面、系统、具有独创性的古希腊几何杰作．在此后一千多年的时间内，后人(至少在几何上)几乎不能再为它增添什么新的内容．

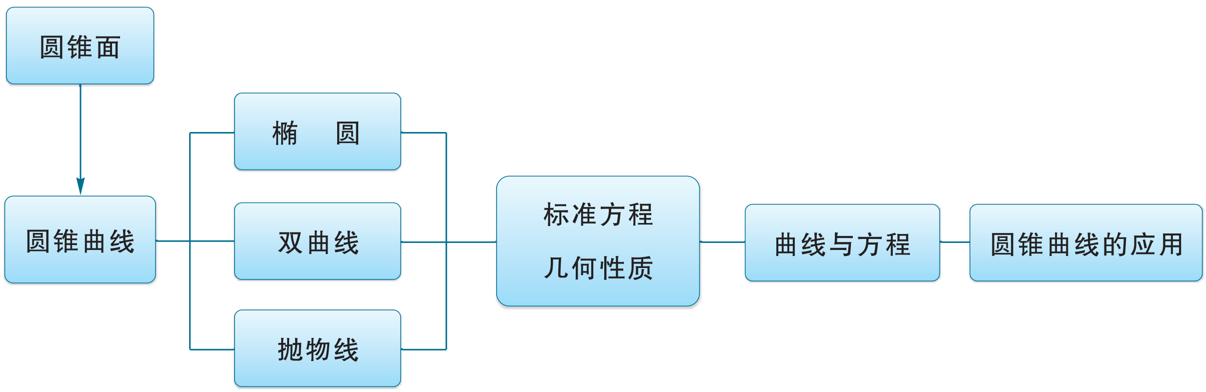
17 世纪中叶，笛卡儿创建了解析几何，利用坐标法对圆锥曲线重新进行了研究，发现二次曲线在建立适当的坐标系后，一般总能归结为椭圆、抛物线和双曲线的标准方程．因此，圆锥曲线又称为二次曲线．



圆锥曲线的理论具有广泛的应用，除了应用圆锥曲线的光学性质之外，天体运行的轨道也遵循圆锥曲线的规律．开普勒(1571—1630)在研究第谷(1546—1601)的观测资料的基础上，发现了行星沿椭圆轨道运动，并提出了著名的行星运动三定律．牛顿(1643—1727)对开普勒的成就加以发展，发现了万有引力定律，利用数学严格地计算出：当初始速度为7.9 km/s 时，物体绕地球运行的轨道是一个圆；当初始速度超过 7.9 km/s，但小于11.2 km/s 时，物体绕地球运行的轨道是一个椭圆；而当初始速度大于或等于 11.2 km/s 时，物体将沿着抛物线的轨道远离地球永不回头．

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1．圆锥曲线的基本理论，起源于公元前 4 世纪古希腊几何学的研究．用平面截圆锥，改变平面与圆锥轴线的夹角，可以得到圆、椭圆、双曲线、抛物线，古希腊学者将其称为圆锥曲线．

2．欧洲文艺复兴时期，随着笛卡儿解析几何的创立，古老的数学发现(圆锥曲线的理论)又焕发新的生机．人们根据圆锥曲线的几何特征，选择适当的平面直角坐标系，将圆锥曲线用方程表示，并通过研究方程得到圆锥曲线的几何性质．这种用代数方法研究几何问题的思路是“坐标法”，生动体现了数形结合的思想．

设椭圆、双曲线和抛物线的焦点都在 x 轴上，试总结它们的图形特征、标准方程和方程中各系数的几何意义，并完成下表．

类　型	椭　圆	双曲线	抛物线
定　义			
图　形			

续表

类　型	椭　圆	双曲线	抛物线
标准方程			
顶点坐标			
对称轴			
焦点坐标			
离心率			

3. 椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线，它们的统一性如下：

(1) 从几何学的观点看：它们都是由平面截圆锥面得到的截线.

(2) 从方程的形式看：它们的方程都是关于 x，y 的二次方程，因此这些曲线又称为二次曲线.

(3) 从点的集合(或轨迹)的观点看：它们都是与定点和定直线距离的比是常数 e 的点的集合(或轨迹)，这个定点是它们的焦点，定直线是它们的准线. 只是由于离心率 e 取值范围的不同，而分为椭圆、双曲线和抛物线三种曲线.

4. 同直线与圆的位置关系一样，直线与椭圆、双曲线、抛物线的位置关系有相交、相切、相离三种情况，我们如何用代数方法来判断?

5. 从数学的角度来分析，圆锥曲线是满足某些条件的点的集合(或轨迹)，我们一般性地讨论了平面直角坐标系中的曲线 C 与二元方程 $F(x, y)=0$ 的关系，介绍了曲线与方程的概念，在此基础上进一步学习求曲线方程的一般方法.

6. 圆锥曲线是描述天体运行轨道时常用的曲线，也是我们日常生活中常见的曲线，圆锥曲线的光学性质在现实生活中也有相当广泛的应用. 可进一步查阅相关资料，了解圆锥曲线的应用.

复习题三

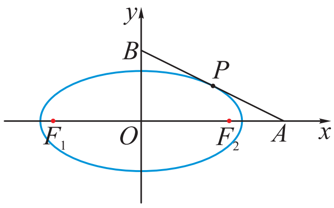
学而时习之

1. 选择一个沙漏，形状越接近对顶的圆锥越好，倾斜沙漏，轻微晃动使沙面接近平行于水平面. 观察沙面与沙漏侧面的交线形状.

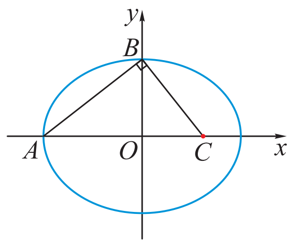
2. 根据下列条件判断方程$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$表示什么曲线.

（1）$k<4$；（2）$4<k<9$.

3. 如图，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与过$A(2，0)$，$B(0，1)$的直线有且只有一个公共点$P$，且椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求该椭圆的方程.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，A，B，C分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的顶点与焦点，若$\angle ABC=90°$，求该椭圆的离心率.

5. 求椭圆$\frac{y^2}{7}+\frac{x^2}{4}=1$上的点到直线$3x-2y-16=0$的最短距离，并求出此时椭圆上的点的坐标.

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$的焦点为$F_1$，$F_2$，点$M$在双曲线上，且$MF_1\perp x$轴，求$F_1$到直线$F_2M$的距离.

7. 过点$A(6，1)$作直线与双曲线$x^2-4y^2=16$相交于B，C两点，且A为线段BC的中点，求这条直线的方程.

8. 已知两抛物线的顶点在原点，而焦点分别为$F_1(2，0)$，$F_2(0，2)$，求经过它们的交点的直线方程.

9. 已知抛物线$y^2=4x$，过点$P(4，0)$的直线与抛物线相交于$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，求$y_1^2+y_2^2$的最小值.

10. 已知动抛物线的准线为y轴，且经过点$(1，0)$，求抛物线焦点的轨迹方程.

11. 设有一颗彗星，围绕地球沿一抛物线轨道运行，地球恰好位于这条抛物线的焦点处，当此彗星离地球d万千米时，经过地球和彗星的直线与抛物线的轴的夹角为$30°$，求这

颗彗星与地球的最短距离.

温故而知新

12. 设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$的两个焦点是 $F_1(-c, 0)$和 $F_2(c, 0)(c>0)$，且椭圆 C 与圆 $x^2+y^2=c^2$ 有公共点.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 若椭圆上的点到焦点的最短距离为$\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求该椭圆的方程；

(3) 对(2)中的椭圆 C，直线 l：$y=kx+m(k\neq 0)$与 C 交于不同的两点 M，N，若线段 MN 的垂直平分线恒过点 $A(0, -1)$，求实数 m 的取值范围.

13. (1) 已知 A，B 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$长轴上的两个端点，$Q$ 为椭圆上任意一点，证明：当点 Q 为椭圆短轴的端点时，$\angle AQB$ 最大.

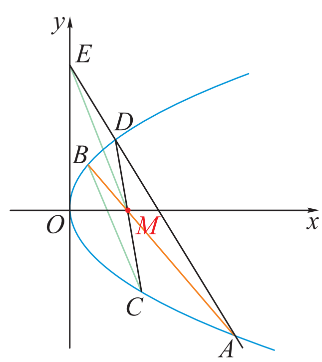
(2) 设 A，B 是椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足$\angle AMB=120°$，求 m 的取值范围.

14. 若双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的一条渐近线被圆$(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，求 C 的离心率.

15. 如图，$M(a, 0)(a>0)$是抛物线 $y^2=4x$ 对称轴上一点，过点 M 作抛物线的弦 AB，交抛物线于 A，B.

(1) 若 $a=2$，求弦 AB 中点的轨迹方程；

(2) 过点 M 作抛物线的另一条弦 CD，若 AD 与 y 轴交于点 E，连接 ME，BC，求证：$ME // BC$.



(第 15 题)

16. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A，B 是抛物线上的两动点，且$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$. 过 A，B 两点分别作抛物线的切线，它们的交点为 M.

(1) 证明$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$为定值；

(2) 设$\triangle ABM$ 的面积为 S，写出 $S=f(\lambda)$的表达式，并求 S 的最小值.

17. 已知荒漠上有两定点 A，B，它们相距 2 km，现准备在荒漠上围垦出一片以 AB 为一条对角线的平行四边形区域建成农艺园，按照规划，围墙总长为8 km．又该荒漠上有一条直水沟 l 恰好经过点 A，且与 AB 成 30°角．现要对整条水沟进行加固，但考虑到今后农艺园的水沟要重新设计改造，所以对水沟可能被农艺园围进的部分暂不加固，问暂不加固的部分有多长？

上下而求索

18. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的中心为 O，右顶点为 A，在线段 OA 上任意选定一点 $M(m,0)(0<m<2)$，过点 M 作与 x 轴垂直的直线交 C 于 P，Q 两点．

(1) 设 $m=1$，在 OM 的延长线上求一点 N，使得 $|OM|$，$|OA|$，$|ON|$ 成等比数列，试证明直线 PN，QN 都是 C 的切线；

(2) 通过解答(1)，先猜想求过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上一点 $G(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$ 的切线方程的一种方法，再加以证明．

19. 已知两个定点 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，动点 M 满足直线 MA_1 与 MA_2 的斜率之积为定值 $\frac{m}{4}(m\neq0)$．

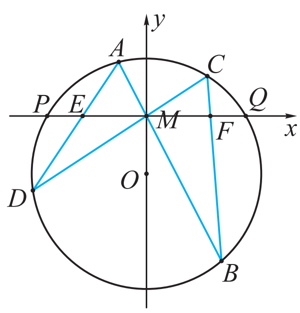
(1) 求动点 M 的轨迹方程，并指出随 m 变化时方程所表示的曲线 C 的形状．

(2) 若 $m=-1$，设直线 l 与曲线 C 相交于 E，F 两点，直线 OE，l，OF 的斜率分别为 k_1，k，k_2（其中 $k>0$），△OEF 的面积为 S，以 OE，OF 为直径的圆的面积分别为 S_1，S_2．若 k_1，k，k_2 恰好构成等比数列，求 $\frac{S_1+S_2}{S}$ 的取值范围．

20. 设圆 O 的弦 PQ 的中点为 M，过点 M 任作两弦 AB，CD，弦 AD 与 BC 分别交 PQ 于 E，F．

(1) 试用解析几何的方法证明：M 为 EF 的中点；

(2) 如果将圆分别变为椭圆、双曲线或抛物线，你能得到类似的结论吗？



（第 20 题）

数学建模

冰川融化模型

一 问题背景

冰川是地球上最大的淡水水库，全球70%的淡水资源储存在冰川中．随着地球气候持续变暖，全球冰川正以有历史记录以来的最大速度加速融化，这引起了各国政府、环保组织的高度警惕．自20世纪50年代以来，许多国家的科研机构展开对极地的科考工作．通过长期的跟踪调查、收集资料、建立各种模型，旨在揭示冰川融化的机制，以及对全球气候与环境变化的影响．

二 问题解析

由于受到冰川区域的地理环境、气候等诸多因素的影响，加上世界上大大小小的冰川其形状互不相同，要建立一个对于各种复杂条件下都适合的冰川融化模型，并准确预测冰川融化的速度是一个难度很大的问题．因此，在这里我们仅考虑一种特殊的情况：将一个冰川地区的地貌局限于与椭圆相关的形状，并在匀加速融化的理想条件下建立冰川融化的数学模型．其目的是唤起人们树立和增强保护环境的意识．

1. 模型建立与求解

考虑一个比较简单的问题．

为了考察冰川融化的状况，一支科考队在某冰川上相距8 km的A，B两点各

建一个考察基地．以过两点的直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，在直线 $x=2$ 的右侧，考察范围为到 B 点距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ km 的区域；在直线 $x=2$ 的左侧，考察范围为到 A，B 两点距离之和不超过 $4\sqrt{5}$ km 的区域．

（1）求考察区域边界曲线的方程．

（2）如图 1 所示，设线段 P_1P_2，P_2P_3 是冰川的部分边界线（不考虑其他边界），当冰川融化时，边界线沿着与其垂直的方向朝考察区域平行移动，第一年移动 0.2 km，以后每年移动的距离为前一年的 2 倍．求冰川的边界线移动到考察区域所需要的最短时间．

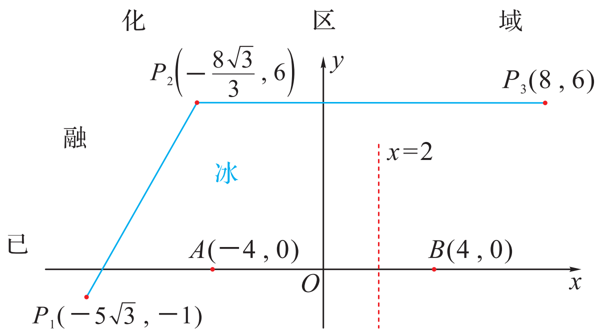


图 1

模型求解

（1）设考察区域边界上的点 P 的坐标为 (x, y)．

当 $x\geqslant 2$ 时，由题意知 $(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}$．当 $x<2$ 时，由 $|PA|+|PB|=4\sqrt{5}>8$ 知，点 P 在以 A，B 为焦点，长轴长为 $2a=4\sqrt{5}$ 的椭圆上，此时短半轴长 $b=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$，因而其方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$．因此，考察区域由圆与椭圆的一部分组合而成，考察区域的边界曲线（如图 2 所示）的方程为

$$C_1：(x-4)^2+y^2=\frac{36}{5}(x\geqslant 2) \text{和} C_2：\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1(x<2).$$

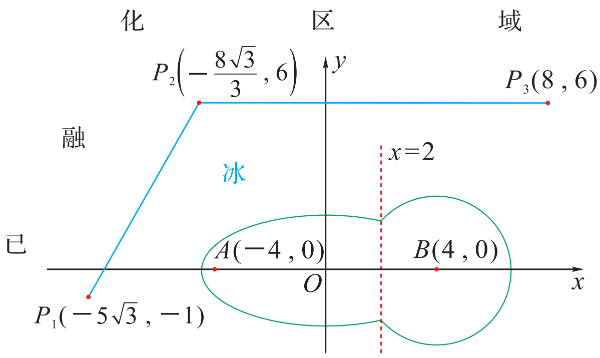


图 2

（2）设过点 P_1，P_2 的直线为 l_1，过点 P_2，P_3 的直线为 l_2，则直线 l_1，l_2 的方程分别为

$$y=\sqrt{3}x+14,\ y=6.$$

设直线 l 平行于直线 l_1，其方程为 $y=\sqrt{3}x+m$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$，消去 y，得 $16x^2+10\sqrt{3}mx+5(m^2-4)=0$.

由 $\Delta=100\times3m^2-4\times16\times5(m^2-4)=0$，解得 $m=8$ 或 $m=-8$.

从图 2 中可以看出，当 $m=8$ 时，直线 l 与 C_2 的公共点到直线 l_1 的距离最近，此时直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x+8$，l 与 l_1 之间的距离为

$$d_1=\frac{|14-8|}{\sqrt{1+3}}=3.$$

又直线 l_2 到 C_1 和 C_2 的最短距离 $d_2=6-\frac{6\sqrt{5}}{5}>3$，所以考察区域边界到冰川边界线的最短距离为 3 km.

设冰川边界线移动到考察区域所需的时间为 n 年，则由题设以及等比数列求和公式，得到

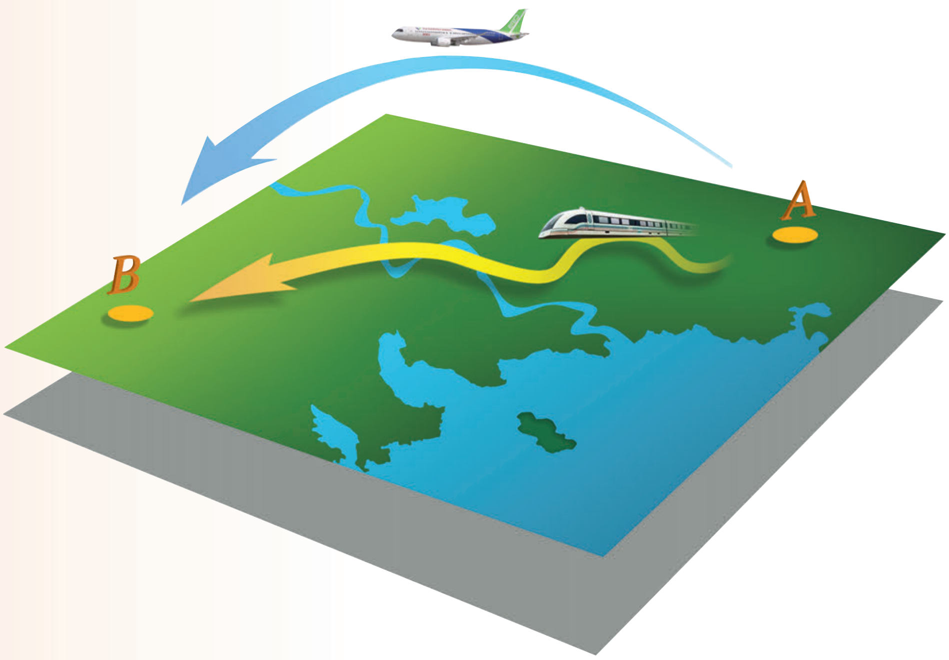
$$\frac{0.2(2^n-1)}{2-1}\geqslant3,$$

解得 $n\geqslant4$，因此冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间为 4 年.

2. 模型的进一步讨论

上述冰川融化模型是在冰川地貌为水平面、冰川区域为规则的平面几何图形（椭圆和圆的组合图形）以及冰川融化速度成等比数列等理想化的状态下设计的. 在实际世界中，冰川的自然环境可能更加复杂，在这种情况下，需要更深刻的数学理论与方法才有可能较好解决复杂环境下的冰川融化问题.

4 计数原理



人类的计数活动可以追溯到远古，只不过那时的计数仅限于很小的数目．人们普遍认为只有当大量东西需要计数的时候，数学意义上的计数才发展起来．

计数问题是数学研究的重要对象之一．在许多实际问题中，当计数的个数很大，我们很难将各种可能性的方法一一列举，人们在实践的基础上总结出一些基本的计数方法，这就是本章将要学习的分类加法计数原理和分步乘法计数原理，它们为解决许多问题提供了基本的思想和工具．排列、组合和二项式定理是这两个计数原理的直接应用．

4.1 两个计数原理

分类加法计数原理与分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，也称基本计数原理. 它们为解决很多实际问题提供了思想和工具.

4.1.1 分类加法计数原理

在日常生活中，计数问题是非常普遍的. 我们先考虑如下两个简单的例子，然后从中归纳出一般的规律.

问题 1 从甲地到乙地，可乘汽车或火车两种交通工具，如果一天内有 4 趟汽车开往乙地，有 3 列火车开往乙地，那么一天内从甲地到乙地有多少种不同的乘车选择?

分析 如图 4.1-1，从甲地到乙地，有汽车和火车两种交通工具，乘汽车有 4 种选择，乘火车有 3 种选择，所以一共有

$$4+3=7$$

种不同的乘车选择.

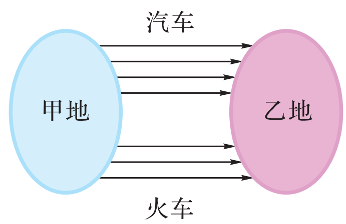


图 4.1-1

问题 2 某书架共有三层，第一层放有 3 本不同的数学书，第二层放有 2 本不同的语文书，第三层放有 2 本不同的英语书. 从该书架上任取 1 本书，有多少种不同的取法?

分析 从该书架上任取 1 本书，结果可能是数学书、语文书或英语书. 取到数学书、语文书或英语书时分别有 3 种、2 种或 2 种不同的取法，所以一共有

$$3+2+2=7$$

种不同的取法.

一般地，有如下原理：

分类加法计数原理 **如果完成一件事有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，每种方法都能独立完成这件事，那么完成这件事共有**

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

我们把分类加法计数原理简称为**分类计数原理**，或**加法原理**.

例 1 某市的有线电视可以接收中央台 12 个频道、本地台 10 个频道和其他省市 46 个频道的节目.

(1) 当这些频道播放的节目互不相同时，一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

(2) 如果有 3 个频道正在转播同一场球赛，其余频道正在播放互不相同的节目，一台电视机共可以选看多少个不同的节目?

解 (1) 当所有频道播放的节目互不相同时，一台电视机选看的节目可分为 3 类:

第一类，选看中央台频道的节目，有 12 个不同的节目;

第二类，选看本地台频道的节目，有 10 个不同的节目;

第三类，选看其他省市频道的节目，有 46 个不同的节目.

根据分类加法计数原理，一台电视机共可以选看

$$12+10+46=68$$

个不同的节目.

(2) 因为有 3 个频道正在转播同一场球赛，即这 3 个频道转播的节目只有 1 个，而其余频道(共有 $(12+10+46-3)$ 个)正在播放互不相同的节目，所以，一台电视机共可以选看

$$1+(12+10+46-3)=66$$

个不同的节目.

用分类加法计数原理解决计数问题时，首先要根据问题的特点确定一个适当的分类标准，然后根据这个分类标准进行分类. 分类时还要注意两条基本原则：一是完成这件事的任何一种方法必须分入相应的类；二是不同类的方法必须是互不相同的. 只有满足这两条基本原则才可以使计数不重不漏.

练习

1. 音乐播放器里存有 10 首中文歌曲，8 首英文歌曲，3 首法文歌曲，任选一首歌曲进行播放，有多少种不同的选法?

2. 一项工作可以用两种方法完成. 有 5 人只会用第一种方法完成，另有 4 人只会用第二种方法完成. 从中选出 1 人来完成这项工作，共有多少种不同的选法?

4.1.2 分步乘法计数原理

问题 3 从甲地到乙地，需从甲地乘汽车到丙地，再于次日从丙地乘火车到乙地，如果一天内有 4 趟汽车从甲地开往丙地，有 3 列火车从丙地开往乙地，那么两天内从甲地到达乙地有多少种不同的乘车选择？

分析 这个问题与问题 1 不同．在问题 1 中，采用乘汽车或乘火车中的任何一种方式，都可以从甲地到乙地．而在这个问题中，必须经历先从甲地乘汽车到丙地，再从丙地乘火车到乙地这两个步骤，才能够从甲地到乙地．

假定从甲地到丙地的 4 趟汽车分别为 a，b，c，d，从丙地到乙地的三列火车分别为 1，2，3，则从甲地到乙地的不同路径为：

$$a1，a2，a3；b1，b2，b3；c1，c2，c3；d1，d2，d3.$$

共有 $4\times3=12$(种)不同的乘车选择，如图 4.1-2.

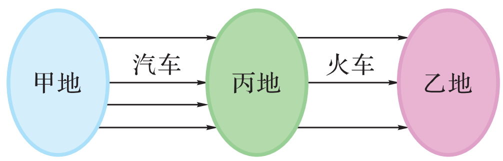


图 4.1-2

问题 4 某书架有三层，第一层放有 3 本不同的数学书，第二层放有 2 本不同的语文书，第三层放有 2 本不同的英语书．从书架的第一、二、三层各取 1 本书，共有多少种不同的取法？

分析 记 3 本不同的数学书分别为 M_1，M_2，M_3，2 本不同的语文书分别为 C_1，C_2，2 本不同的英语书分别为 E_1，E_2，则从书架的第一、二、三层各取 1 本书的所有可能结果为：

$$M_1C_1E_1，M_1C_1E_2，M_1C_2E_1，M_1C_2E_2；$$
$$M_2C_1E_1，M_2C_1E_2，M_2C_2E_1，M_2C_2E_2；$$
$$M_3C_1E_1，M_3C_1E_2，M_3C_2E_1，M_3C_2E_2.$$

共有 $3\times2\times2=12$(种)不同的取法，如图 4.1-3.

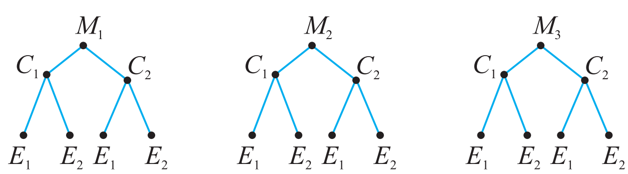


图 4.1-3

一般地，有如下原理：

分步乘法计数原理 **如果完成一件事需要分成 n 个步骤，第一步有 m_1 种不同的方法，第二步有 m_2 种不同的方法，…，第 n 步有 m_n 种不同的方法，每个步骤都**

完成才算做完这件事，那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

我们把分步乘法计数原理简称为**分步计数原理**，或**乘法原理**.

例 2 通信公司在某一段时间内向市场投放一批手机号码，这一批号码(共 11 位数字)的前七位是统一的，后四位都是 0～9 之间的一个数字，那么这一号段共有多少个不同的号码？

分析 由于前七位已确定，我们只需分 4 步来确定后四位数字，11 位手机号码就最终确定. 所以，要用分步乘法计数原理来计算.

解 后四位中的每一位都可以从 0～9 这 10 个数字中任选一个，都有 10 种选法. 根据分步乘法计数原理，可依次确定手机号码的第八、九、十、十一位，那么这一号段共有

$$10\times10\times10\times10=10\ 000$$

个不同的号码.

例 3 某校在艺术节期间需要举办一场文娱演出晚会，现要从 3 名教师、4 名男同学和 5 名女同学当中选出若干人来主持这场晚会(任一人都可主持).

(1) 如果只需一人主持，共有多少种不同的选法？

(2) 如果需要教师、男同学和女同学各一人共同主持，共有多少种不同的选法？

解 (1) 从 3 名教师、4 名男同学和 5 名女同学当中选出一人主持晚会，结果可分为 3 类：

第一类，选一名教师主持，有 3 种选法；

第二类，选一名男同学主持，有 4 种选法；

第三类，选一名女同学主持，有 5 种选法.

根据分类加法计数原理，共有

$$3+4+5=12$$

种不同的选法.

(2) 从 3 名教师、4 名男同学和 5 名女同学当中各选出一人共同主持晚会，可分 3 步：

第一步，选出一名教师，有 3 种选法；

第二步，选出一名男同学，有 4 种选法；

第三步，选出一名女同学，有 5 种选法.

以上 3 个步骤依次完成后，事情才算完成. 根据分步乘法计数原理，共有

$$3\times4\times5=60$$

种不同的选法.

思考：如果需要一名教师和一名学生来共同主持晚会，共有多少种不同的选法?

在使用分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决问题时，一定要分清完成这件事是有 n 类办法还是有 n 个步骤. 分类要做到“不重不漏”. 分类后再分别对每一类进行计数，最后用分类加法计数原理求和，得到总数. 分步要做到“步骤完整”——依次完成所有步骤，恰好完成任务，当然步与步之间要相互独立. 分步后再计算每一步的方法数，最后根据分步乘法计数原理求积，得到总数.

练习

1. 某农场要在 4 种不同类型的土地上，分别试验种植 A，B，C，D 四个不同品种的小麦，共有多少种不同的种植方案?

2. 乘积 $(x_1+x_2+x_3+x_4)(y_1+y_2+y_3)(z_1+z_2)$ 展开后共有多少项?

3. 某校确定的优秀毕业生候选人中，一班有 3 人，二班有 5 人，三班有 2 人.

（1）从三个班中评选出一名优秀毕业生，有多少种不同的选法?

（2）从三个班中各评选出一名优秀毕业生，有多少种不同的选法?

习题 4.1

学而时习之

1. 一栋住宅楼共有 6 层，第一层有 8 户住户，其余每层有 12 户住户. 从中随机挑选一户进行人口调查，共有多少种不同的选择?

2. 我国的邮政编码由 6 位数字组成，如果每个数字可以是 0，1，…，9 中的一个，那么一共可以编排多少个不同的邮政编码?

3. 有三个袋子，第一个袋子装有标号 1～20 的红色小球 20 个，第二个袋子装有标号 1～15 的白色小球 15 个，第三个袋子装有标号 1～8 的蓝色小球 8 个.

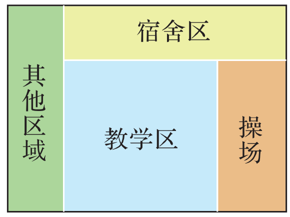
（1）从三个袋子中取一个小球，共有多少种不同的取法?

（2）从每个袋子中各取一个小球，共有多少种不同的取法?

4. 家住北京的李老师每周一要乘上午的火车或汽车到天津讲课一次. 如果每

天上午有 6 次列车和 8 趟汽车开往天津，计算去天津三次时，一共有多少种不同的选择.

5. 如图是某校的主要设施平面图，现用不同的颜色作为各区域的底色，为了便于区分，要求相邻区域不能使用同一种颜色. 若有 6 种不同的颜色可选，问有多少种不同的着色方案?



（第 5 题）

6. 已知某容器中，H 有 3 种同位素，Cl 有 2 种同位素，Na 有 3 种同位素，O 有 4 种同位素，试问一共可以组成多少种 HCl 和 NaOH 的分子?

7. 从甲地到乙地有 3 条公路可走，从乙地到丙地有 5 条小路可走，又从甲地不经过乙地到丙地有 3 条水路可走.

（1）从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法?

（2）从甲地到丙地共有多少种不同的走法?

温故而知新

8. 某人需要在一天的上午乘车从 A 地到 B 地再转车赶到 C 地，现已知 A 地至 B 地以及 B 地至 C 地的汽车时刻表如下：

从 A 地到 B 地的汽车时刻表

车次	发车	到站
1	6：30	8：00
2	7：30	9：00
3	8：30	10：00
4	9：30	11：00

从 B 地到 C 地的汽车时刻表

车次	发车	到站
1	7：20	8：40
2	8：20	9：40
3	9：20	10：40
4	10：20	11：40

问此人在这天从 A 地到达 C 地有多少种不同的乘车方案?

9. 某省的体育彩票中，把有顺序的 7 个数字组成一个号码，称为一注. 7 个数字中的每个数字都选自 0，1，2，…，9 这 10 个数字，并且数字可以重复. 不同号码的彩票一共有多少注?

10. 甲、乙、丙、丁四名同学可以随机地选修王老师、张老师、李老师中任何一位老师开设的课程，一共会有多少种不同的选课方案呢?

4.2 排　列

排列和组合是两类特殊的计数问题，是两个基本计数原理的重要应用.

考虑如下问题：

问题 1　平面上有 5 个不同的点 A，B，C，D，E，以其中两个点为端点的有向线段共有多少条?

分析　要解决这个问题，可以分 2 个步骤完成.

第一步，确定有向线段的起点，在 5 个字母中任取 1 个，有 5 种方法；

第二步，确定有向线段的终点，从余下的 4 个字母中任取 1 个，有 4 种方法.

根据分步乘法计数原理，共可得到 $5\times4=20$(条)不同的有向线段，如图 4.2-1 所示.

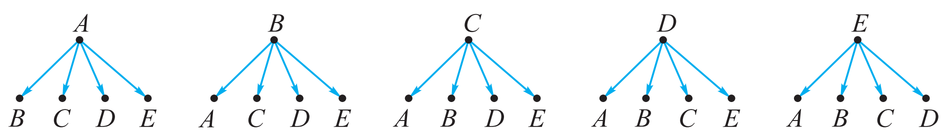


图 4.2-1

由此可写出所有的有向线段：

$$AB，AC，AD，AE；$$
$$BA，BC，BD，BE；$$
$$CA，CB，CD，CE；$$
$$DA，DB，DC，DE；$$
$$EA，EB，EC，ED.$$

问题 2　从 4 名运动员中选出 3 名参加一项比赛，并排定他们的比赛顺序，有多少种不同的方法?

分析　要解决这个问题，可以分 3 个步骤完成.

第一步，先选定第一名比赛队员，在 4 名运动员中任取 1 名，有 4 种方法；

第二步，选定第二名比赛队员，从余下的 3 名运动员中任取 1 名，有 3 种方法；

第三步，选定第三名比赛队员，从余下的 2 名运动员中任取 1 名，有 2 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有 $4\times3\times2=24$(种)不同的排序方法.

若记这 4 名运动员分别为 a，b，c，d，则 24 种不同的方法如图 4.2-2 所示.

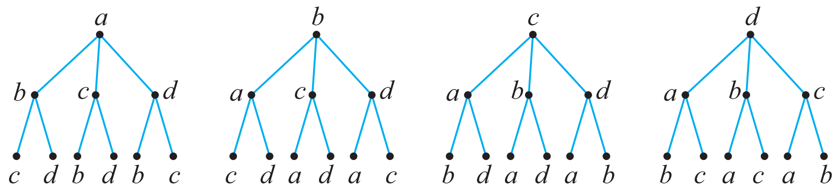


图 4.2-2

由此可写出所有的排序方式：

$$abc，abd，acb，acd，adb，adc；$$

$$bac，bad，bca，bcd，bda，bdc；$$

$$cab，cad，cba，cbd，cda，cdb；$$

$$dab，dac，dba，dbc，dca，dcb.$$

问题 1 与问题 2 的共同特点是什么？你能将其推广到一般情形吗？

事实上，问题 1 可以归结为从 5 个不同的元素中任取 2 个不同的元素，然后按一定的顺序排成一列．同样地，问题 2 可以归结为从 4 个不同的元素中任取 3 个不同的元素，然后按一定的顺序排成一列．

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．

根据排列的定义，一个排列包含两个方面的意义：一是“取出元素”，二是“按照一定顺序排成一列”．因此，两个排列相同，当且仅当这两个排列的元素及其排列顺序完全相同．

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素，所有不同排列的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示．

例如，对于问题 1，是求从 5 个不同元素中取出 2 个元素的排列数，记为 A_5^2，由分步乘法计数原理可以算得

$$\mathrm{A}_5^2=5\times4=20.$$

对于问题 2，是求从 4 个不同元素中取出 3 个元素的排列数，记为 A_4^3，由分步乘法计数原理可以算得

$$\mathrm{A}_4^3=4\times3\times2=24.$$

问题 1 与问题 2 在求解方法上有某种相通性，对于一般的从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m，该怎样计算呢？

我们可以这样来考虑：假定有排好顺序的 m 个空位（如图 4.2-3），从 n 个不同元素 a_1，a_2，…，a_n 中任意取 m 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列．因此，所有不同填法的种数就是排列数 A_n^m．

填空可分为 m 步：

第 1 步，第 1 个位置，可以从 n 个元素中任取一个填上，有 n 种填法；

第 2 步，第 2 个位置，从余下的 $(n-1)$ 个元素中任取一个填上，有 $(n-1)$ 种填法；

……

第 m 步，确定排在第 m 个位置的元素，可以从余下的 $[n-(m-1)]$ 个元素中选取一个填上，有 $(n-m+1)$ 种填法.

图 4.2-3

根据分步乘法计数原理，全部填满 m 个空位共有

$$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$$

种填法.

这样，我们就得到公式

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1),$$

其中 n，$m\in\mathbf{N}_+$，并且 $m\leqslant n$，这个公式叫作**排列数公式**.

特别地，从 n 个不同元素中取出 n 个不同的元素(即全部取出)排成一列，叫作 n 个元素的一个**全排列**，此时

$$\mathrm{A}_n^n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1,$$

我们将右端简记为 $n!$，叫作 n 的**阶乘**，表示正整数 1 到 n 的连乘积. 特别地，规定 $0!=1$.

根据上面阶乘的定义得

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_n^m&=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\cdot[(n-m)(n-m-1)\cdot\cdots\cdot1]}{(n-m)(n-m-1)\cdot\cdots\cdot1}\\&=\frac{n!}{(n-m)!}.\end{aligned}$$

这样，排列数公式还可以写成

$$\mathrm{A}_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

例 1 计算：

（1）A_6^4；　　　　（2）$A_3^2+A_4^3+A_5^3$.

解　（1）$A_6^4=6\times5\times4\times3=360$；

（2）$A_3^2+A_4^3+A_5^3=3\times2+4\times3\times2+5\times4\times3=90$.

例 2 春节期间，某班 20 名同学互发一条问候短信，那么他们发出的短信总数有多少条？

分析　每条短信都对应一个发信人和一个收信人，这是一个排列问题，故短信总数是从 20 个不同元素中取出 2 个元素的排列数.

解　发出的短信总数为

$$A_{20}^2=20\times19=380(\text{条}).$$

例 3 （1）有 5 个不同的科研小课题，从中选 3 个安排高二年级的 3 个课外兴趣小组参加，每组一个课题，共有多少种不同的安排方法？

（2）有 5 个不同的科研小课题，高二年级的 3 个课外兴趣小组报名参加，每组限报一个，共有多少种不同的报名方法？

解　（1）从 5 个不同的课题中选出 3 个，安排课外兴趣小组来参加，对应于从 5 个元素中取出 3 个元素的一个排列. 因此，共有

$$A_5^3=5\times4\times3=60$$

种不同的安排方法.

（2）每个小组都可从 5 个不同的课题中选报一个，因此第一小组有 5 个不同的课题可以选择，第二小组也有 5 个不同的课题可以选择，第三小组仍然有 5 个不同的课题可以选择，根据分步乘法计数原理，一共有

$$5\times5\times5=125$$

种不同的报名方法.

例 4 由数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中小于 50 000 的偶数共有多少个？

解　要组成一个没有重复数字的五位数，可以分成以下步骤来完成：

第一步，排个位数，因为要求是偶数，所以只能排 2 或 4，排法有 A_2^1 种；

第二步，排万位数，小于 50 000 的五位数，万位数只能是 1，3 或排个位数时余下的 2，4 中的一个，排法有 A_3^1 种；

在首末两位数排定后，第三步排中间 3 个数字时，排法有 A_3^3 种.

根据分步乘法计数原理，所求偶数共有

$$A_2^1A_3^1A_3^3=2\times3\times3\times2\times1=36(\text{个}).$$

练习

1. 计算：(1) $4A_4^2+5A_5^3$；　　　　(2) $A_4^1+A_4^2+A_4^3+A_4^4$.

2. 计算下表中的阶乘数，并填入表中.

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

3. 某公司有 5 艘远洋货轮，现在要派遣 3 艘执行运输任务，若派遣的先后有次序之分，共有多少种不同的派遣方法?

4. 将不同的 8 封信随意放入 8 个写好地址的信封，共有多少种不同的放法?

5. 用 0，1，2，…，9 这 10 个数字能组成多少个没有重复数字的三位数?

习题 4.2

学而时习之

1. 计算 $A_6^1+A_6^2+A_6^3$.

2. 已知 $A_n^n+A_{n-1}^{n-1}=xA_{n+1}^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+，n\geqslant 2)$，求 x 的值.

3. 某电视台连续播放 6 个广告，其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告，要求首尾必须播放公益广告，则有多少种不同的播放方式?

4. 某信号兵用黄、红、绿三面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以挂一面、两面或三面，并且用不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号?

5. (1) 6 名同学站成一排照相，其中甲、乙两人必须相邻的站法有多少种?

(2) 一台晚会有 6 个节目，其中有 2 个小品，如果 2 个小品不连续演出，共有多少种不同的演出顺序?

温故而知新

6. 用 0，1，2，3，4，5，6 可以组成多少个无重复数字的五位数？其中能被 5 整除的五位数有多少个？

7. 4 个读者到 4 个服务台排队还书，恰有一个服务台没有这 4 个读者还书的排队方案有多少种？

8. 某单位安排 7 位工作人员在 10 月 1 日至 10 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 10 月 1 日和 2 日. 共有多少种不同的安排方法？

9. 3 名男生和 4 名女生按下列条件排成一排，分别有多少种不同的排法？

（1）男生排在一起，女生排在一起；

（2）男、女生间隔排列；

（3）男生互不相邻.

4.3 组　合

考察下面两个问题，并思考这两个问题与 4.2 节的问题 1、2 有什么联系与区别？

问题 1　平面上有 5 个不同的点 A，B，C，D，E，以其中两个点为端点的线段共有多少条？

分析　如图 4.3－1，以 A 为端点，到其余四点的线段有 4 条：AB，AC，AD，AE.

A 不是端点，以 B 为端点之一，到其余三点的线段有 3 条：BC，BD，BE；

A，B 都不是端点，C 为端点之一，到其余两点的线段有 2 条：CD，CE；

A，B，C 都不是端点，剩下两点 D，E 为端点的线段只有 1 条：DE.

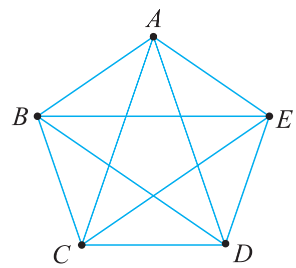


图 4.3－1

共有 $4+3+2+1=10$（条）不同的线段.

问题 2　从 a，b，c，d 这 4 个字母中，取出 3 个组成一组，共有多少种不同的取法？

分析　从 a，b，c，d 这 4 个字母中，取出 3 个组成一组，所有取法为

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

共有 4 种不同的取法.

上述问题 1、2 与 4.2 节的排列问题比较而言，相同点都是从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素；不同点是本节的两个问题与所选的元素的顺序无关，而排列问题与顺序有关.

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素，不论次序地构成一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

根据组合的定义，两个组合相同，当且仅当这两个组合的元素完全相同.

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素，所有不同组合的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

例如，对于问题 1，是求从 5 个不同元素中取出 2 个元素的组合数，记为 C_5^2，由列举法可得 $C_5^2=10$. 对于问题 2，是求从 4 个不同元素中取出 3 个元素的组合数，记为 C_4^3，由列举法可得 $C_4^3=4$.

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m 怎么计算呢？我们可以从研究组合与排列的关系入手来分析.

例如，对于前面 4.2 节中的问题 1，以 5 个不同的点 A，B，C，D，E 中的两个点为端点的有向线段共有 A_5^2 条. 也可以从“先取后排”的角度来看，首先从 5 个不同的点 A，B，C，D，E 中选出两个点，有 C_5^2 种方法；然后由选出的两点组成一条有向线段，有 A_2^2 种方法. 因此，根据分步乘法计数原理有 $A_5^2=C_5^2A_2^2$，所以 $C_5^2=\dfrac{A_5^2}{A_2^2}=\dfrac{20}{2}=10$.

问题：你能对 4.2 节中的问题 2，从“先取后排”的角度，得到 C_4^3 的计算方法吗？

一般地，求从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m，可以分两步完成：

第一步（选元素），先从这 n 个不同元素中取出 m 个元素，不考虑次序构成一个组合，共有 C_n^m 个组合；

第二步（排位置），将每一个组合中的 m 个元素进行全排列，全排列数是 A_m^m.

根据分步乘法计数原理，得到

$$A_n^m=C_n^mA_m^m.$$

由此得到组合数 C_n^m 的计算公式：

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!},$$

其中 n，$m\in\mathbf{N}_+$，并且 $m\leqslant n$，这个公式叫作**组合数公式**.

因为 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，所以，上面的组合数公式还可以写成

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

特别地，规定 $C_n^0=1$.

例 1 计算 C_{10}^3 和 C_{10}^7.

解 $C_{10}^3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$,

$C_{10}^7=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=120$.

可以发现，$C_{10}^3=C_{10}^7$，我们能否对这一结果进行解释呢？

从 10 个不同元素中取出 3 个元素后，还剩 7 个元素. 也就是说，从 10 个不同的元素中每次取出 3 个元素的一个组合，与剩下的 7 个元素的组合是一一对应的，因此，从 10 个不同元素中取出 3 个元素的组合数，与从 10 个不同元素中取出 7 个元素的组合数是相等的，即 $C_{10}^3=C_{10}^7$.

一般地，从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合数与从 n 个不同元素中选取 $(n-m)$ 个元素的组合数相等，即 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

因为

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!\,[n-(n-m)]!}=\frac{n!}{(n-m)!m!},$$

所以 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 成立.

例 2 星辰中学从“十佳志愿者”的 10 人中任选 5 人代表学校参加“为美丽乡村增光添彩”的志愿服务活动. 问：

（1）共有多少种不同的选法？

（2）如果还要从选出的 5 人中再选定一人为组长，那么共有多少种不同的选法？

解 （1）由于从 10 人中任选 5 人，与顺序无关，所以共有

$$C_{10}^5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

种选法.

（2）（方法一）从这 10 人中任选 5 人，并确定其中一人为组长，可以分为如下两步完成：

第一步，先从 10 人中任选 5 人，共有 C_{10}^5 种方法；

第二步，从选出的 5 人中再确定 1 人为组长，共有 C_5^1 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有

$$C_{10}^5\times C_5^1=1\ 260$$

种不同的选法.

（方法二）从这 10 人中任选 5 人，并确定其中一人为组长，可以分为如下两步完成：

第一步，先从 10 人中选定 1 人为组长，共有 C_{10}^1 种方法；

第二步，从余下的 9 人中再选出 4 人，共有 C_9^4 种方法.

根据分步乘法计数原理，共有

$$C_{10}^1 \times C_9^4 = 1\ 260$$

种不同的选法.

例 3 从 4 台标清彩电和 5 台高清彩电中选购 3 台，要求至少有标清彩电与高清彩电各 1 台，共有多少种不同的选法？

解 选法可分为两类：

第一类，从 4 台标清彩电中选 1 台，从 5 台高清彩电中选 2 台，共有 $C_4^1C_5^2$ 种不同的选法；

第二类，从 4 台标清彩电中选 2 台，从 5 台高清彩电中选 1 台，共有 $C_4^2C_5^1$ 种不同的选法.

根据分类加法计数原理，共有

$$C_4^1C_5^2 + C_4^2C_5^1 = 4 \times 10 + 6 \times 5 = 70$$

种不同的选法.

思考：对于本题，你还能想到别的解法吗？

例 4 6 本不同的书，按下列要求各有多少种不同的分法：

（1）分给甲、乙、丙三人，每人 2 本；

（2）分为三份，每份 2 本；

解 （1）将 6 本不同的书分给甲、乙、丙三人，每人 2 本，可以分为三步完成：

第一步，先从 6 本书中选 2 本给甲，有 C_6^2 种选法；

第二步，从其余的 4 本中选 2 本给乙，有 C_4^2 种选法；

第三步，最后剩余的 2 本给丙，有 C_2^2 种选法.

根据分步乘法计数原理，共有

$$C_6^2C_4^2C_2^2 = 15 \times 6 \times 1 = 90$$

种不同的分法.

（2）分给甲、乙、丙三人，每人 2 本，这件事情可以分两步完成：

第一步，将 6 本书分为三份，每份 2 本，设有 x 种方法；

第二步，将这三份分给甲、乙、丙三人有 A_3^3 种方法.

根据(1)的结论和分步计数原理得到 $C_6^2C_4^2C_2^2 = xA_3^3$，所以

$$x = \frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3} = 15.$$

因此分为三份，每份 2 本一共有 15 种方法. 本题称为“均匀分组”问题.

思考：若要将 6 本书分为三份，一份 1 本，一份 2 本，一份 3 本，共有多少种不同的分法呢？

练习

1. 计算：(1) C_{15}^{3}；　　(2) $C_{8}^{3}-C_{7}^{3}$；　　(3) C_{200}^{198}.

2. 求证：$C_{n+1}^{m}=C_{n}^{m}+C_{n}^{m-1}$ (m, $n\in\mathbf{N}_{+}$).

3. (1) 凸六边形有多少条对角线？

(2) 凸 n 边形有多少条对角线？

4. 10 件产品中有合格品 8 件，次品 2 件，从中抽取 4 件，计算：

(1) 都不是次品的取法共有多少种？

(2) 至少有 1 件次品的取法共有多少种？

5. 有 6 本不同的书，按下列要求各有多少种不同的分法？

(1) 甲分 1 本、乙分 2 本、丙分 3 本；

(2) 一人分 4 本，另两人各分 1 本.

习题 4.3

学而时习之

1. 计算：$C_{7}^{3}+C_{7}^{4}+C_{8}^{5}+C_{9}^{6}$.

2. 求证：$mC_{n}^{m}=nC_{n-1}^{m-1}$($m$, $n\in\mathbf{N}_{+}$, $n\geqslant 2$).

3. 圆上有 12 个不同的点.

(1) 过每两点画一条弦，一共可以画多少条不同的弦？

(2) 过每三点画一个圆内接三角形，一共可以画多少个圆内接三角形？

4. 从 1，3，5，7，9 中任取两个数字，从 2，4，6，8 中任取三个数字，一共可以组成多少个没有重复数字的五位数？

5. 某公司为员工制订了一项旅游计划，从 7 个旅游城市中选择 5 个进行游览. 如果 M，N 为必选城市，并且在游览过程中必须按先 M 后 N 的次序，则不同的游览线路有多少种？

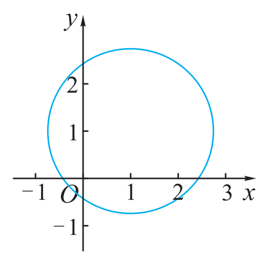
6. 甲、乙、丙、丁 4 个公司承包 6 项工程，甲、乙公司均承包 2 项，丙、丁公司各承包 1 项，则共有多少种承包方式？

温故而知新

7. 某公司计划在北京、上海、广州、成都 4 个候选城市投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则该公司不同的投资方案有多少种?

8. 在某种信息传输过程中，用 4 个数字的一个排列（数字允许重复）表示一个信息，不同排列表示不同信息．若所用数字只有 0 和 1，则与信息 0110 至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为多少?

9. 如图，已知圆$(x-1)^2+(y-1)^2=3$，以圆内横坐标与纵坐标均为整数的点为顶点构造三角形，这样的三角形一共有多少个?



（第 9 题）

10. 某药品研究所研制了 5 种消炎药(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5)、4 种退热药(b_1，b_2，b_3，b_4)，现从中取出两种消炎药和一种退热药同时使用进行疗效试验，但已知 a_1，a_2 两种药必须同时使用，且 a_3，b_4 两种药不能同时使用，则不同的试验方案有多少种?

11. 有 100 件产品，其中 5 件次品，95 件正品，现要从这 100 件产品中随机抽取 6 件进行检查．根据以下要求，计算各有多少种不同的取法．

(1) 抽到的全是正品；

(2) 恰抽到 2 件正品；

(3) 至少抽到 1 件次品；

(4) 至多抽到 2 件次品．

4.4 二项式定理

在初中我们学过多项式乘法，并且知道：如果 a，b 是任意实数，那么

$$(a+b)^1=a+b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

如果计算

$$(a+b)^4=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b),$$

等号右边的积展开后，各项分别是什么呢？

$(a+b)^4$ 由四个因式$(a+b)$相乘得到，每个因式中有两项：a，b. 展开后的每项由每个因式$(a+b)$中任取一项（a 或 b）相乘得到，因而各项都是四次式，其所含字母的形式分别为

$$a^4,\ a^3b,\ a^2b^2,\ ab^3,\ b^4.$$

我们再看展开式中各项的系数，也就是上面各项在展开式中出现的次数.

a^4 是由$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$的四个因式中都只取 a（即每个都不取 b）相乘得到，有 1 种选法，所以 a^4 的系数是 C_4^0；

a^3b 是四个因式中任取一个因式内的 b 与另三个因式内的 a 相乘得到，有 C_4^1 种选法，所以 a^3b 的系数是 C_4^1；

a^2b^2 是四个因式中任取两个因式内的 b 与另两个因式内的 a 相乘得到，有 C_4^2 种选法，所以 a^2b^2 的系数是 C_4^2；

ab^3 是四个因式中任取三个因式内的 b 与另一个因式内的 a 相乘得到，有 C_4^3 种选法，所以 ab^3 的系数是 C_4^3；

b^4 是四个因式中都只取 b 相乘得到，有 C_4^4 种选法，所以 b^4 的系数是 C_4^4.

因此

$$\begin{aligned}(a+b)^4&=\mathrm{C}_4^0a^4+\mathrm{C}_4^1a^3b+\mathrm{C}_4^2a^2b^2+\mathrm{C}_4^3ab^3+\mathrm{C}_4^4b^4\\&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.\end{aligned}$$

据此获得启发，设 a，b 是任意实数，对于正整数 n，有以下猜想：

$$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n.$$

下面，我们来推理证明上述猜想.

由于$(a+b)^n$是n个二项式$(a+b)$相乘，根据多项式相乘的规律，展开式中的每一项都是一个n次式，具有形式$a^{n-r}b^r$，其中$r=0$，1，2，…，n.

下面计算形如$a^{n-r}b^r$同类项的个数.

每个$(a+b)$和其他因式相乘时，有选a或选b两种选择. 我们将a看作红球，将b看作黑球. 考虑n个均放有一个红球和一个黑球的盒子. 现从每个盒子中取一个球，有选红球或选黑球两种选择，其结果可分为$n+1$类：

第1类，取出的n个球中，有n个红球，即0个黑球，共有C_n^0种取法，所以展开式中一共有C_n^0项a^n.

第2类，取出的n个球中，有$n-1$个红球，即1个黑球，共有C_n^1种取法，所以展开式中共有C_n^1项$a^{n-1}b$.

……

第$r+1$类，取出的n个球中，有$n-r$个红球，即r个黑球，共有C_n^r种取法，所以展开式中共有C_n^r项$a^{n-r}b^r$.

……

第$n+1$类，取出的n个球中，有0个红球，即n个黑球，共有C_n^n种取法，所以展开式中共有C_n^n项b^n.

由加法原理可得

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n.$$

上述公式称为**二项式定理**. 右边的多项式叫作$(a+b)^n$的**二项展开式**，一共有$n+1$项，其中各项的系数C_n^r(其中$0\leqslant r\leqslant n$，$r\in \mathbf{N}$，$n\in \mathbf{N}_+$)叫作**二项式系数**，式中的$C_n^ra^{n-r}b^r$叫作二项展开式的通项，用T_{r+1}表示，即通项为展开式的第$r+1$项：

$$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r.$$

在二项式定理中，如果设$a=1$，$b=x$，则得到公式：

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n.$$

例 1 求$\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$的展开式.

解
$$\begin{aligned}\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4&=\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{1}{x^2}(3x-1)^4\\&=\frac{1}{x^2}[C_4^0(3x)^4+C_4^1(3x)^3\cdot(-1)+C_4^2(3x)^2\cdot(-1)^2+\\&\quad C_4^3(3x)\cdot(-1)^3+C_4^4(-1)^4]\\&=\frac{1}{x^2}(81x^4-108x^3+54x^2-12x+1)\\&=81x^2-108x+54-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

例 2 计算$(x+2y)^9$的展开式中第 5 项的系数和二项式系数.

解 $(x+2y)^9$的展开式的第 5 项是

$$T_5=T_{4+1}=C_9^4\cdot x^{9-4}\cdot(2y)^4=C_9^4\cdot 2^4\cdot x^5y^4,$$

所以展开式中第 5 项的系数是 $C_9^4\cdot 2^4=2\ 016$，第 5 项的二项式系数是 $C_9^4=126$.

例 3 求$\left(1+\dfrac{2}{x}\right)(1-x)^9$ 的展开式中 x^5的系数.

解 原式可化为

$$(-x+1)^9+\frac{2}{x}(-x+1)^9,$$

其中含 x^5的项为

$$C_9^4(-x)^5\cdot 1^4+\frac{2}{x}C_9^3(-x)^6\cdot 1^3=-126x^5+168x^5=42x^5.$$

因此，x^5的系数是 42.

练 习

1. 求$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$ 的展开式.
2. 求$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中第 3 项的系数和二项式系数.
3. 求$(1+x+x^2)(1-x)^{10}$的展开式中 x^5的系数.

$(a+b)^n$ 的展开式中二项式系数依次是 C_n^0，C_n^1，…，C_n^r，…，C_n^n，当 n 依次取 1，2，3，4，…时，我们把对应的二项式系数按如下形式排列：

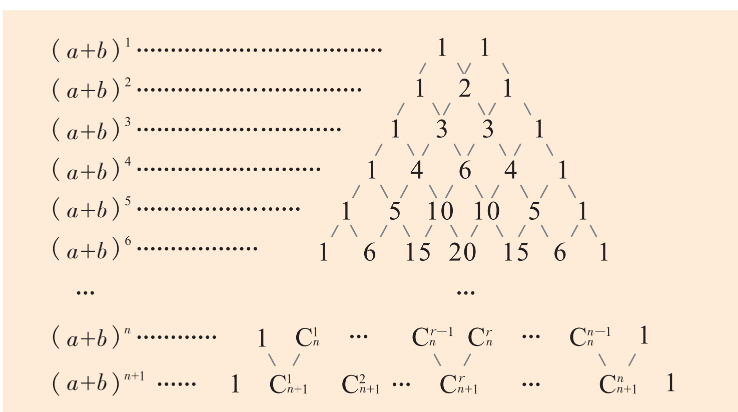


图 4.4－1

图 4.4－1 中的三角形数表称为“二项式系数表”，类似这样的数表在我国南宋

时期杨辉所著的《详解九章算法》一书中曾列出过(如图 4.4-2)．杨辉在书中说明：表中每一行两端都是数字 1，而其余位置上的每个数都等于它“肩上”两个数的和．例如：$2=1+1$，$3=1+2$，$4=1+3$，$6=3+3$，…．实际上由组合数的计算公式可以算得 $\mathrm{C}_{n+1}^{r}=\mathrm{C}_{n}^{r-1}+\mathrm{C}_{n}^{r}$，即表中除 1 之外的任一数 C_{n+1}^{r} 等于它“肩上”两数 C_{n}^{r-1} 与 C_{n}^{r} 的和．

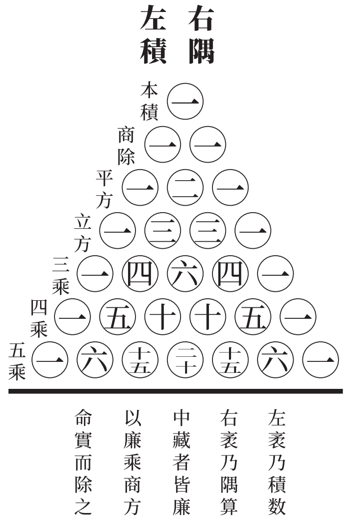


图 4.4-2

一般地，对于 $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数

$$\mathrm{C}_n^0,\ \mathrm{C}_n^1,\ \mathrm{C}_n^2,\ \cdots,\ \mathrm{C}_n^n,$$

我们可以将其看作函数

$$f(r)=\mathrm{C}_n^r,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

进而可以用函数的观点来研究它们．

例如，当 $n=6$ 时，我们可以画出 $f(r)=\mathrm{C}_6^r$ 的图象，如图 4.4-3 所示．

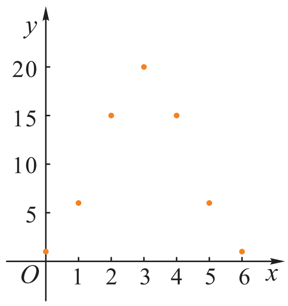


图 4.4-3

你能够分别画出当 $n=7$，8，9 时，$f(r)=\mathrm{C}_n^r$ 的图象吗？试一试．

通过观察函数图象，我们不难得到二项式系数的一些性质特点：

(1) 对称性：二项式系数 $f(r)$ 关于直线 $r=\frac{n}{2}$ 对称，即 $f(r)=f(n-r)$．在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，即 $\mathrm{C}_n^r=\mathrm{C}_n^{n-r}$．

(2) 单调性和最大值：二项式系数 $f(r)$ 从两端向中间逐渐增大，且当 n 是偶数时，展开式的项数 $n+1$ 是奇数，中间一项的二项式系数 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值；当 n 是奇数时，展开式的项数 $n+1$ 是偶数，中间两项的二项式系数 $\mathrm{C}_n^{\frac{n-1}{2}}$，$\mathrm{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等，且同时取得最大值．

这是因为，$\dfrac{f(r)}{f(r-1)}=\dfrac{\mathrm{C}_n^r}{\mathrm{C}_n^{r-1}}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\dfrac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!}=\dfrac{n-r+1}{r}$，当 $\dfrac{n-r+1}{r}>1$，即 $r<\dfrac{n+1}{2}$ 时，有 $f(r)>f(r-1)$，即二项式系数是逐渐增大的；当 $\dfrac{n-r+1}{r}<1$，即 $r>\dfrac{n+1}{2}$ 时，有 $f(r)<f(r-1)$，即二项式系数是逐渐减小的．

(3) 各二项式系数的和：由二项式定理得

$$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n,$$

令 $a=b=1$，则

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n. \qquad (*)$$

即$(a+b)^n$的展开式中各二项式系数的和等于 2^n.

你还能用其他的方法证明(*)式吗?

例 4 当 n 为偶数时，求证：

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}.$$

证明 由二项式定理得

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n,$$

分别令 $a=b=1$ 和 $a=1$，$b=-1$，相应得到

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n, \qquad ①$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots-C_n^{n-1}+C_n^n=0. \qquad ②$$

①+②得 $$2(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n)=2^n,$$

即 $$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^{n-1}.$$

①−②得

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}.$$

所以，当 n 为偶数时有 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}$.

思考：当 n 为奇数时，是否有类似的等式?

例 5 已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，计算 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 取 $x=0$ 得到 $a_0=1$.

再取 $x=1$，得$-1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7$，于是

$$a_1+a_2+\cdots+a_7=-1-a_0=-2.$$

练习

1. (1) 已知$(1+x)^n$的展开式中第 5 项和第 9 项的二项式系数相等，求 n；

(2) $(x+2y)^7$ 的二项式系数的最大值是多少?

2. 已知$(1+x)^n$的展开式中第 5，6，7 项系数成等差数列，求展开式中系数最大的项.

3. 已知$(1+3x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7+a_8x^8$,计算：

(1) $a_0+a_1+\cdots+a_7+a_8$； (2) $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_7+a_8$；

(3) $a_1+a_2+\cdots+a_8$.

4. 当 n 为奇数时，求证：

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^n=2^{n-1}.$$

5. 若$(1+x)^n$的展开式中，x^3 的系数是 x 的系数的 7 倍，求 n 的值及二项式系数的最大值.

习题 4.4

学而时习之

1. 用二项式定理展开下列各式：

（1）$(\sqrt[3]{a}+b)^6$；　　（2）$\left(2\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^7$.

2. （1）求$(a-2b)^8$的展开式中第 6 项的系数；

（2）求$\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$的展开式的中间一项；

（3）求$\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^4+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$的展开式中的常数项；

（4）求$(1+2\sqrt{x})^6+(1-\sqrt[3]{x})^5$的展开式中 x 的系数.

3. 在$(ax-1)^5$的展开式中，x^3的系数是-80，求 a 的值.

4. 在$(3x-2y)^{20}$的展开式中，求：

（1）二项式系数最大的项；

（2）系数绝对值最大的项；

（3）系数最大的项.

温故而知新

5. （1）求$(1-x)^5(1+x+x^2)^5$的展开式；

（2）化简$(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)$.

6. 已知$(1+2x)^n$的展开式中第 7 项和第 8 项的二项式系数相等，求展开式中系数最大的项及二项式系数最大的项.

7. 用二项式定理证明 $99^{10}-1$ 可以被 1 000 整除.

8. 已知$(2x+\sqrt{3})^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，求$(a_0+a_2+a_4)\cdot(a_1+a_3+a_5)$的值.

9. 在$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$的展开式中，前三项的系数成等差数列，求展开式中所有的有理项.

数学文化

中国古代的排列组合

我国古代有许多与排列组合有关的有趣例子.

古老的《周易》中有一种叫作“易卦”的图形，它是由两种不同的线条每次取 6 条由下至上重叠而成(如图 1). 连续的线条叫作阳爻，断开的线条叫作阴爻，阳爻与阴爻统称为爻. 每一个易卦都由 6 个爻组成，每一爻都有取阳爻或取阴爻两种方法，所以，易卦共有 $2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6=64$(个).

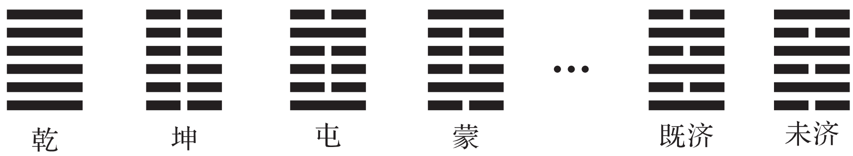


图 1

《史记》里记载了一个“田忌赛马”的故事. 齐王经常和他的大臣田忌赛马，双方各有上马、中马、下马一匹，每次比赛时三匹马各出场一次，一对一地进行比赛，共赛三场，每场赌注为一千金. 田忌的马与齐王的马相比略有逊色. 田忌的上马不敌齐王的上马，但胜过齐王的中马和下马；田忌的中马不敌齐王的上马和中马，但胜过齐王的下马. 开始，田忌总是用自己的上马、中马和下马分别去对齐王的上马、中马和下马，屡战屡败. 后来田忌的谋士孙膑分析了比赛共有 $3!=6$(种)可能的结果，其中只有一种对田忌有利. 于是孙膑让田忌用下马对齐王的上马，用中马对齐王的下马，用上马对齐王的中马，结果两胜一负，反而赢得一千金.

唐代科学家僧一行(683—727)和宋代科学家沈括(1031—1095)都曾经讨论过围棋可能出现的局势总数问题，其结果是一个天文数字. 围棋盘纵横各有 19 路，共 $19\times19=361$(个)格. 每个格点都有“黑子”“白子”“无子”3 种可能，因而有 3^{361} 种不同的棋局. 当然这只是理论上的，有些棋局不合棋理，不大可能出现在实际对弈中. 但世事无绝对，图 2 展现的人工智能程序 AlphaGo 与人对弈的一盘棋，它的很多下法让专业棋手大吃一惊. 这说明在“大数据”面前，人类的计算力处于劣势，因此不能仅凭经验去否定掉一些看似价值不大的数据.

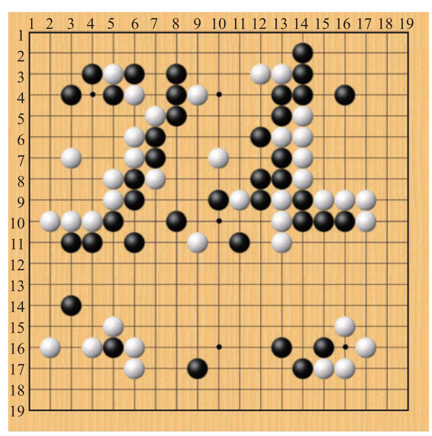


图 2

数学文化

杨辉三角

我国南宋数学家杨辉在1261年所著的《详解九章算法》一书中呈现了一张“开方作法本源”图(如图4.4-2)，并且说这个方法是出自《黄帝九章算术细草》，贾宪曾经用过它，但该书早已失传，加之“开方作法本源”这一名词过于古奥，后人就把这个图形简称为“杨辉三角”或“贾宪三角”.

该图形是否是贾宪所作，作于何时，研究者尚难以确定，但可以肯定的是，这一图形的发明当不迟于1200年左右. 在欧洲，这个图形被称为“帕斯卡三角”，人们一般认为这是帕斯卡在1654年发明的. 其实在帕斯卡之前已有许多人论及过，最早的是德国人阿批纳斯，他曾经把这个图形印在1527年著的一本算术书的封面上.

图1以图形的形式表示杨辉三角，我们可以从中直观地看出它的一些性质.

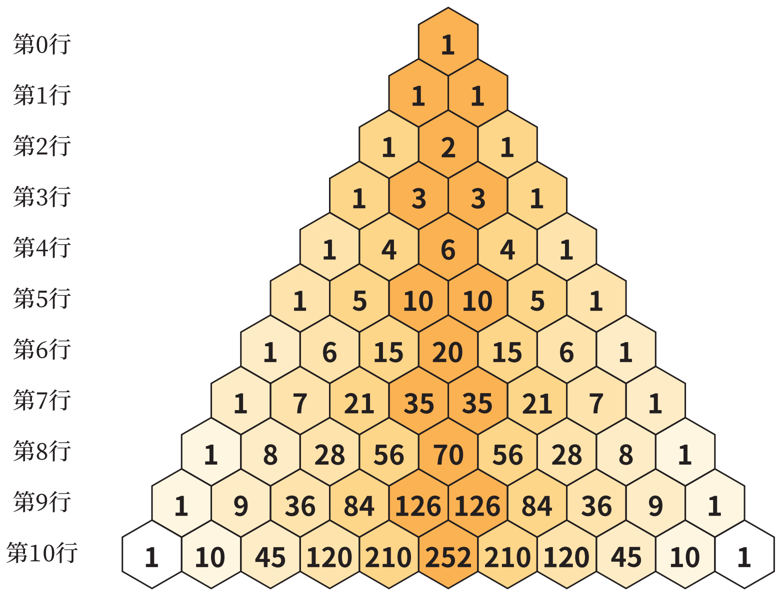


图1

(1) 第 n 行的 $n+1$ 个数是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的系数；

(2) 当行数 n 为偶数时，$C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；

(3) 当行数 n 为奇数时，$C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 最大；

(4) 第 n 行的数字之和等于 2^n.

我们还可以从其他的角度来分析杨辉三角(如图 2)，并发现一些有趣的排列规律.

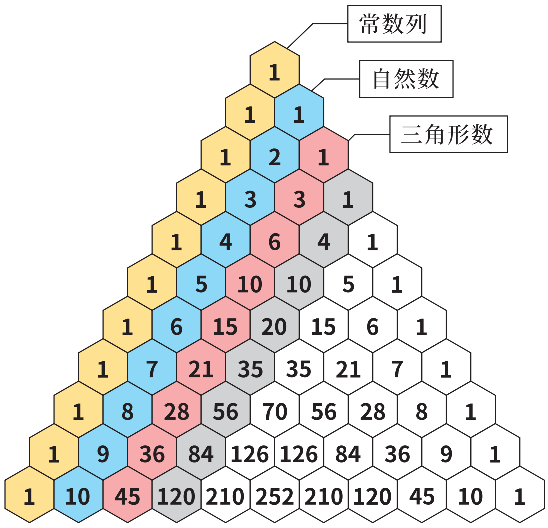


图 2

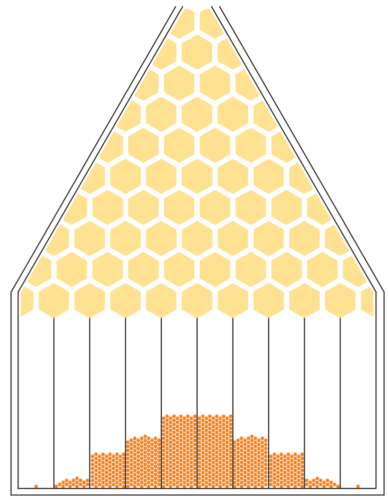


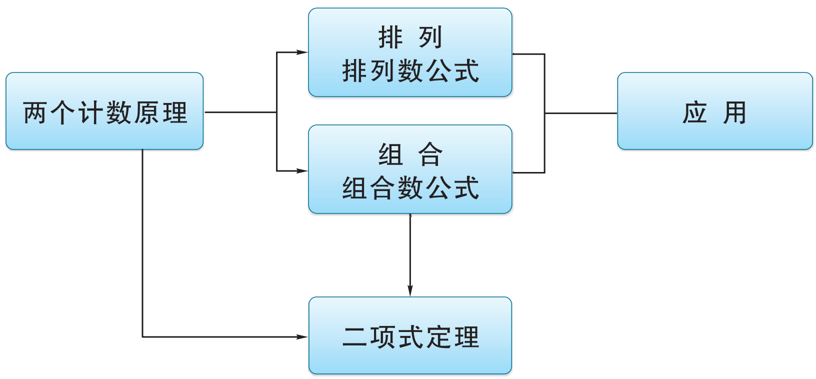
图 3

对于杨辉三角的构成，还有一种有趣的看法. 如图 3，在一块倾斜的木板上钉上一些正六角形的小木块，在它们中间留下一些通道，从上部的漏斗直通到下部的长方框. 把小弹子倒在漏斗里，小弹子就会沿着通道掉入方框. 我们很容易发现一个事实，就是任何一层的左右两边的通道都只有一条路线，而其他任何一个通道的可能路线，都等于它左右两肩上两个通道可能的路线条数之和，这正是杨辉三角组成的规则. 于是我们知道，第 $n+1$ 层通道从左到右，分别有 1，C_n^1，C_n^2，…，C_n^{n-1}，1 条可能的路线.

如果在倾斜板上做了 $n+1$ 层通道，从顶上漏斗里放下了$(1+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+1)$颗弹子，让它们自由地落下，掉在下面的 $n+1$ 个长方框里，那么落在这 $n+1$ 个框中的弹子的正常数目(按照可能情形计算)，正好是杨辉三角的第 n 行上的各数.

小结与复习

一、 知识结构图



二、 回顾与思考

1. 计数问题是数学研究的重要对象之一. 面对一个复杂问题，分类或分步是人们思考解决路径最自然的选择，分类加法计数原理和分步乘法计数原理是关于计数的两个最基本的原理，它们为解决许多实际问题提供了基本的思想和工具. 试结合实例阐述两个计数原理的特征、区别与联系，体会其在计数问题的解决中所起到的思路与方法的引领作用.

2. 排列与组合是两类特殊的计数问题，是两个基本计数原理的直接应用. 试结合实例体会排列问题与组合问题的特征、区别与联系. 排列数公式与组合数公式的推导是两个计数原理的应用，这两个公式之间有何联系？

3. 二项式定理是两个基本计数原理与组合的重要应用. 如何利用计数原理得到$(a+b)^n$的展开式？试简要说明每一项的形成过程，并指出二项式定理展开式中的系数、指数、项数的特点是什么.

4. 计数原理、排列、组合在现实生活中有着广泛地应用，它们也是概率论和数理统计的基础知识. 同学们可结合实际生活中的计数问题，运用所学的知识去解决它，进一步体会计数原理的作用与价值.

复习题四

学而时习之

1. 判断下列问题是排列问题还是组合问题.

（1）设集合 $A=\{a, b, c, d, e\}$，则集合 A 的含有 3 个元素的子集有多少个？

（2）某高铁线上有 5 个车站，则这条高铁线上共需准备多少种二等座车票？有多少种不同的二等座火车票价？（往返票价一致）

（3）从 2，3，5，7，9 中任取两个不同的数做乘法，其结果有多少种？若任取两个不同的数做除法，其结果有多少种？

2. 填空：

（1）甲、乙、丙 3 名同学选修兴趣课程，从 5 门课程中，甲选修 2 门，乙选修 4 门，丙选修 3 门，则不同的选修方案共有________种.

（2）H 城市某段时间内发放的汽车牌照号码由 2 个英文字母后接 4 个数字组成，其中 4 个数字互不相同，这样的牌照号码共有________种.

（3）4 名教师分配到 3 所学校任教，每所学校至少 1 名教师，则不同的分配方案共有________种.

（4）五人并排站成一排，甲、乙必须相邻且甲在乙的左边，则不同的站法共有________种.

（5）要排出某班一天中语文、数学、政治、英语、体育和艺术 6 门课各一节的课程表，要求数学课排在前 3 节，英语课不排在第 6 节，则不同的排法共有________种.

3. 4 名男生、3 名女生站成一排，分别求满足下列条件的站法种数.

（1）男生和女生均相邻；

（2）男生均相邻；

（3）女生均不相邻；

（4）男生与男生、女生与女生均不相邻；

（5）至少有两个女生相邻.

4. （1）用 1，2，3，4，5，6，7 这七个数字组成没有重复数字的四位数，其中偶数共有多少个？

（2）用 1，2，3，4，5，6，7 可以组成多少个没有重复数字，并且小于 60 000 的正整数？

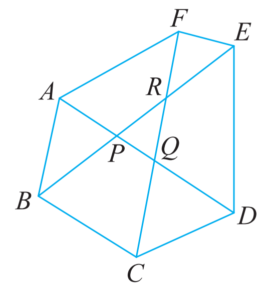
（3）从 1，2，3，4，5，6，7 这七个数字中任取两个奇数和两个偶数，组成没有重复数字的四位数，其中奇数共有多少个？

5. 将 5 本不同的书分给 3 名学生，每名学生至少一本，则不同的分法共有多少种？

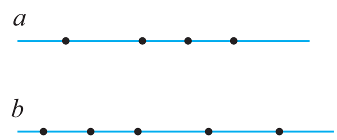
6. 从 10 名大学毕业生中选 3 人担任村主任助理，求甲、乙至少有一人入选，而丙没有入选的不同选法的种数.

7. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 的 6 个顶点和其对角线 AD，BE，CF 的交点 P，Q，R

中，如果过其中的每 3 个点作一个圆，共可作多少个圆？



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，平行直线 a，b 上分别有 4 个和 5 个不同的点，

（1）任取这 9 个点中的两个连一条直线，则一共可以连多少条不同的直线？

（2）任取这 9 个点中的三个首尾相连，则一共可以组成多少个不同的三角形？

9. （1）求 $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中的常数项；

（2）若 $\left(x^2+\dfrac{1}{ax}\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{5}{2}$，求 a 的值；

（3）求 $(1+\sqrt[3]{x})^6\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$ 的展开式中的常数项；

（4）若 $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128，求展开式中 $\dfrac{1}{x^3}$ 的系数．

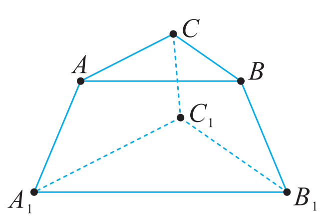
温故而知新

10. 用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的自然数，问：

（1）能够组成多少个五位偶数？

（2）能够组成多少个小于 2 018 的正整数？

11. 有 3 种颜色的灯泡，要在如图所示三棱台的 6 个顶点 A，B，C，A_1，B_1，C_1 上各装一个灯泡，要求同一条线段两端的灯泡不同色，则不同的安装方法共有多少种？



（第 11 题）

12. 四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，在其中任取 4 个点，这 4 点不共面的取法共有多少种？

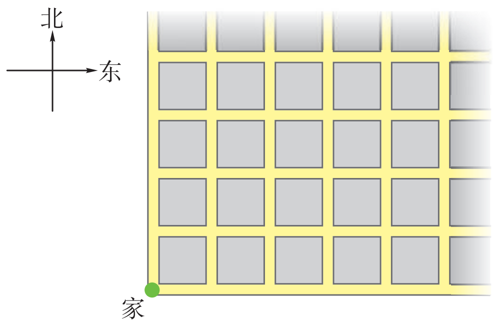
13. 用二项式定理证明$55^{55}+9$能被 8 整除.

14. 已知 $f(x)=(2x+1)^m+(6x+1)^n(m, n\in \mathbf{N})$的展开式中 x 的系数为 24，求展开式中 x^2的系数的最小值.

15. 已知$(1+2x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(2x)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k(n\in \mathbf{N}_+)$. 若$(1+2x)^n$的展开式中末三项的二项式系数的和为 92，试判断展开式系数组成的数列 a_0，a_1，…，a_n的单调性，并求其最大项.

上下而求索

16. 设某地的街道把城市分割成矩形方格，称每个方格为一个块，小张从家里出发上班，向东要走 m 块，向北要走 n 块. 问小张上班的最短路径有多少种？



（第 16 题）

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英文名	页码
数　列	sequence of number	2
项	term	2
首　项	leading term	2
通项公式	general term	3
等差数列	arithmetic sequence	12
公　差	common difference	12
等差中项	arithmetic mean	13
等比数列	geometric sequence	23
公　比	common ratio	23
数学归纳法	mathematical induction	38
倾斜角	angle of inclination	57
斜　率	slope	58
点斜式方程	point slope form of equation	62
截　距	intercept	63
斜截式方程	slope intercept form of equation	63
两点式方程	two points form of equation	64
截距式方程	intercept form of equation	65
一般式方程	general form of equation	66
方向向量	direction vector	68
法向量	normal vector	70
圆的标准方程	standard equation of circle	85

中文名	英文名	页码
圆的一般方程	general equation of circle	87
圆锥曲线	conic sections	108
椭　圆	ellipse	112
焦　点	focus	112
焦　距	focal length	112
长　轴	major axis	116
短　轴	minor axis	116
离心率	eccentricity	117
双曲线	hyperbola	122
实　轴	real axis	126
虚　轴	imaginary axis	126
渐近线	asymptote	127
抛物线	parabola	134
准　线	directrix	134
加法原理	principle of addition	171
乘法原理	principle of multiplication	173
排　列	arrangement	177
阶　乘	factorial	178
组　合	combination	182
二项式定理	binomial theorem	189
二项展开式	binomial expansion	189
二项式系数	binomial coefficient	189

后　　记

为全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，加快实现教育现代化和建设教育强国的宏伟目标，并为学生的终身发展奠定良好基础，我们依据教育部颁布的《普通高中数学课程标准(2017 年版)》，组织专家编写出《普通高中教科书・数学》，现将本书热忱地奉献给广大读者.

本书的编写遵循《普通高中数学课程标准(2017 年版)》确立的基本理念和目标要求，以发展学生数学核心素养为导向，通过选取体现时代发展、科技进步和符合学生生活经验的素材，采取符合学生认知发展规律的呈现方式，帮助学生在获得必要的基础知识和基本技能、感悟数学基本思想、积累数学基本活动经验的过程中，进一步发展其思维能力、实践能力和创新意识. 在教科书编写过程中，吸收了基础教育课程改革实验的优秀成果，凝聚了参与课程改革实验的广大数学家、数学课程专家、教研人员以及一线教师的集体智慧. 一大批数学教师为本书的修订提出了宝贵的意见. 在此，对所有为本次修订编写提供过帮助和支持的社会各界朋友表示衷心的感谢.

在本书出版之前，我们通过多种渠道与教科书所选用资料和图片的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示诚挚的谢意！但仍有部分作者未能取得联系，恳请这些作者尽快与我们联系，以便支付稿酬.

教材建设是一项长期而艰巨的任务. 我们真诚地希望广大师生在使用本书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们. 让我们携起手来，共同完成数学教科书建设这一光荣的使命！

教材编写委员会

普通高中教科书

数　学

选择性必修　第一册

责任编辑：胡　旺　邹伟华

湖南教育出版社出版（长沙市韶山北路443号）

电子邮箱：hnephmath@126.com

客服电话：0731－85486796

湖南出版中心代印

广东省新华书店经销

湖南天闻新华印务有限公司印装

890 mm×1240 mm　16开　印张：13　字数：284 000

2019年11月第1版　2020年7月第1次印刷

ISBN 978－7－5539－3968－1

定价：14.92元

批准文号：粤发改价格［2017］434号·举报电话：12315

如有质量问题，影响阅读，请与湖南出版中心联系调换。

联系电话：0731－88388986　0731－88388987